Der Einfluss des Rohrdurchmessers auf die Ausbreitung einer Detonation

Doktorarbeit

vorgelegt

von

Wolfgang Pusch

aus Berlin

Göttingen 1965

1964

Der Einfluss des Rohrdurchmessers auf die Ausbreitung einer Detonation

Doktorarbeit

vorgelegt

von

Wolfgang Pusch

aus Berlin

Göttingen 1965

D 7

Referent: Prof. Dr. W. Jost

Korreferent: Prof. Dr. W. Lüttke

Tag der mündlichen Prüfung: 15. 5. 1964

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. W. Jost, möchte ich für die freundliche Förderung und das stete Interesse an dieser Arbeit danken. - Herrn Privatdozent Dr. habil. H. Gg. Wagner bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und zahlreiche kritische Diskussionen zu Dank verpflichtet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544314_0042

I 1 Einführung

In den Jahren 1881-85 veröffentlichten Berthelot und Vieille (1) einerseits und Le Chatelier und Mallard (2) andererseits ihre Arbeiten über die Ausbreitung von Flammen in Rohren. Sie hatten unabhängig von einander entdeckt, daß sich die Verbrennung in Rohren mitunter mit einer Geschwindigkeit ausbreitet, die wesentlich größer als die bekannten Flammengeschwindigkeiten (3) war. Sie bezeichneten diese Erscheinung als Explosionswelle. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten, die Berthelot und Vieille mit einer chronoelektrischen Meßstrecke bestimmten, während Mallard und Le Chatelier außerdem mit Filmplatten arbeiteten, die sich senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Detonation bewegten, betrugen 2 bis 4 km/sec. Das entspricht einem Mehrfachen der Schallgeschwindigkeit des unverbrannten Gases unter Normalbedingungen. - Berthelot konnte außerdem zeigen, daß die Detonationsgeschwindigkeit für ein bestimmtes Gasgemisch konstant ist.

Ungefähr zehn Jahre später wiederholte Dixon (4) die Messungen von Berthelot und Le Chatelier. Er benutzte bei seinen Untersuchungen sowohl eine chronoelektrische Meßstrecke als auch eine Drehspiegelkamera. In einer zusammenfassenden Arbeit (5) aus dem Jahre 1903 veröffentlichte er eine große Anzahl seiner Aufnahmen. - Dixon wies auch darauf hin, daß ein Zusammenhang zwischen der Detonationsgeschwindigkeit und der Schallgeschwindigkeit der verbrannten Gase bestehen müßte und gab damit den Anstoß zu einer theoretischen Erklärung der Detonation.

An Hand der Messungen Dixons entwickelten unabhängig von einander Chapman (6) und Jouguet (7) um 1900 eine Theorie der Detonation. Sie legten die von Riemann (8), Rankine (9) und Hugoniot (10) für Stoßwellen entwickelte Theorie zu Grunde und betrachteten die Detonation als eine mit einer chemischen Reaktion gekoppelte Stoßwelle. Mit diesen Grundlagen ließ sich aber die Detonationsgeschwindigkeit noch nicht eindeutig bestimmen. Chapman und Jouguet

forderten daher zusätzlich, daß es sich bei der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer stabilen Detonation um die kleinste mit der Theorie verträgliche Geschwindigkeit handeln sollte.

Eingehendere Untersuchungen an Detonationen wurden in der Folgezeit u.a. von Campbell und Mitarbeitern (11) und Lafitte (12) ausgeführt. - Campbell entdeckte bei seinen Untersuchungen die Erscheinung der spinnenden Detonation und erforschte sie näher. Außerdem prüfte er die Abhängigkeit der Detonationsgeschwindigkeit vom Rohrdurchmesser. Dazu benutzte er Rohre mit einem Innendurchmesser zwischen 5 und 20 mm und stellte fest, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Detonation praktisch unabhängig von dem Rohrdurchmesser ist. Allerdings verwandte er Rohre, die höchstens 40 cm lang waren, so daß seine Ergebnisse in bezug auf die Durchmesserabhängigkeit für die Folgezeit nur einen geringen Aussagewert hatten. - Lafitte untersuchte ebenfalls den Einfluß des Rohrdurchmessers auf die Detonation und interessierte sich außerdem für den Einfluß der Temperatur und des Ausgangsdruckes auf eine Detonation. Ferner spektroskopierte er das von einer Detonation ausgesandte Licht.

Immer wieder befaßte man sich in der Folgezeit mit der Untersuchung der Detonation, da immer noch viele Probleme ihrer Lösung harrten. So folgten experimentelle Arbeiten u.a. von Bone und Fraser (13), die hauptsächlich spinnende Detonationen mit hochauflösenden Spiegelkameras erforschten. - Payman (14), ein Mitarbeiter Dixons, fotografierte erstmalig Detonationsvorgänge mit Hilfe der Toeplerschen Schlierenmethode. - In den Jahren 1924-25 veröffentlichte Wendlandt (15) als erster eindeutige Messungen der Detonationsgrenzen an Gasgemischen und gab eine theoretische Erklärung der Grenzen. - Eine ausführliche experimentelle Arbeit über die Detonationsgeschwindigkeiten und Detonationsgrenzen einer größeren Anzahl Brenngas-Luft- und Brenngas-Sauerstoff-Systeme wurde 1936 von Breton (16) veröffentlicht. Seine Messungen beruhten auf einer chronofotografischen Methode mit Hilfe einer rotie-

renden Trommelkamera, wobei die Anwendung eines modifizierten Schattenverfahrens auch die Registrierung schwach oder nicht leuchtender Vorgänge gestattete.

Zusammenfassende und ergänzende theoretische Arbeiten erschienen von Becker (17), Döring und Burkhardt (18), Jost (19), Scorah (20) und Schmidt (21). - Zeldovich (22) und unabhängig davon Döring und v. Neumann (23) erweiterten die Behandlung der Detonation als Stoßwelle, der eine chemische Reaktion folgt. Danach erhält man folgendes Bild einer Detonation (Fig.1): Hinter der Stoßfront einer Detonation nehmen zunächst die drei Zustandgrößen Temperatur, Druck und Dichte sprunghaft zu. Der durch die erfolgte Kompression erreichte Zustand bleibt über einen kurzen Zeitraum konstant. Nach einiger Zeit setzt dann die chemische Reaktion heftiger ein und Druck und Dichte fallen wieder ab, während die Temperatur infolge der freiwerdenden Reaktionswärme weiter steigt. Nach Ablauf der Reaktion erreichen die Zustandsgrößen die von der Chapman-Jouguet-Theorie vorausgeagten Werte.

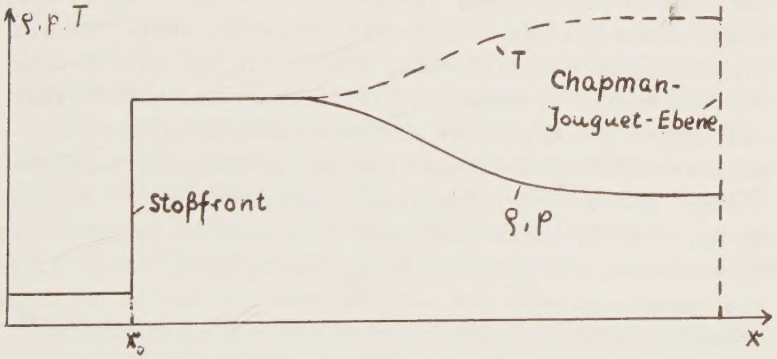


Fig. 1: Verlauf der Dichte, der Temperatur und des Drukkes hinter der Stoßfront einer Detonation

Nach dem Krieg konnte die Untersuchung der Detonationserscheinungen mit besseren Meßapparaten in Angriff genommen werden. Die Forschungsarbeiten nahmen daher stark zu und umfaßten bald ein wesentlich breiteres Gebiet. Im Laufe der Zeit kristallisierten sich im wesentlichen drei Fragenkomplexe heraus, und zwar erforschte man die S t r u k-

tur der Detonationszone, klärte Fragen der Stabilität einer Detonation und der Zündung und des Anlaufens einer Detonation.

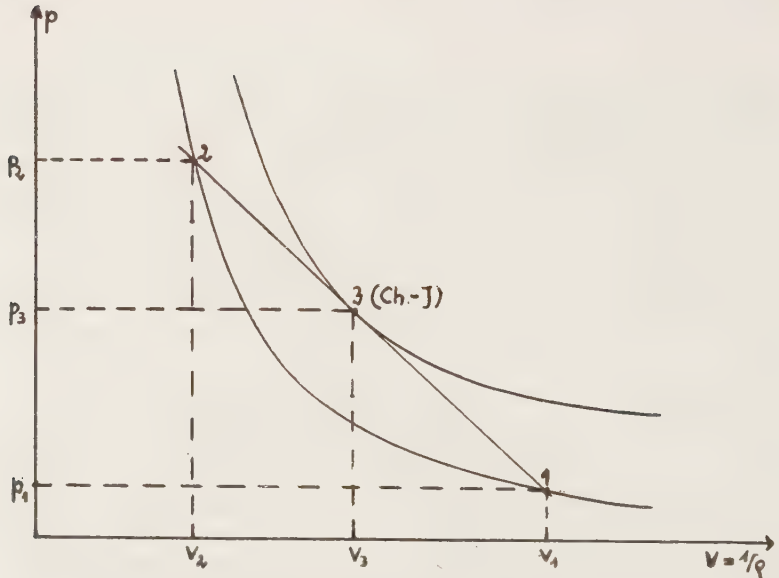
Zur Aufklärung der Struktur der Detonationszone trugen u.a. Jost, Wagner und Just (29, 30, 31, 32, 33), Kistiakowsky und Mitarbeiter (27, 28), Fay und Opel (24), Duff, Knight und Rink (25) und White und Mitarbeiter (26) bei. - Jost und Wagner schätzten an $CO-O_2$-Detonationen, die bei einem Ausgangsdruck von einer Atmosphäre gezündet wurden, zunächst die Länge der Reaktionszone ab. Sie fanden Werte von der Größenordnung eines Zentimeters. Ein Zusatz von H_2 zu den Gemischen verkürzte die Länge der Reaktionszone und eine etwas grobe Extrapolation auf reine Knallgasgemische ergab Werte zwischen 1/10 und 1 mm. Die Ergebnisse stimmten mit späteren Messungen von Kistiakowsky (35), Bennett und Weeda (36) und Gilkerson und Davidson (37) überein. Ferner bestimmten Just und Wagner den Dichteverlauf hinter der Stoßfront einer Detonation mit Hilfe einer Schlierenanordnung. Sie fanden eine qualitative Übereinstimmung mit der Theorie und erhielten Werte für die Dichte hinter der Stoßfront, die 70 bis 90% des theoretischen Wertes betrugen. - Kistiakowsky und Mitarbeiter bestimmten mit Hilfe der Röntgenstrahlabsorption den Dichteverlauf in Knallgas- und Methan-Sauerstoff-Detonationen, und zwar bei Ausgangsdrucken zwischen 30 und 90 mm Hg. - Duff, Knight und Rink untersuchten Detonationen in Gemischen aus $C_2H_2-O_2$, H_2-O_2 und $C_2N_2-O_2$, denen Krypton zugemischt war, und zeigten, daß die Dichte am Chapmann-Jouguet-Punkt immer größer als die berechnete war. Die Experimente wurden in Rohren von 2,5 und 7,5 cm Innendurchmesser und 2 bis 5 m Länge bei Ausgangsdrucken zwischen 20 und 85 mm Hg. ausgeführt. - White fand dagegen bei Untersuchungen an "turbulenten Detonationswellen" in $2H_2 + O_2 + 2CO$-Gemischen bei niedrigen Ausgangsdrucken, daß die Zustandsdaten merklich unterhalb der theoretischen lagen. Aus den orientierenden Messungen ging hervor, daß die Länge der Reaktionszone bei Detonationen, die bei einem Ausgangsdruck von einer Atmosphäre gezündet wurden,

sehr klein ist. Daher waren Messungen innerhalb der Reaktionszone bei Detonationen unter diesen Bedingungen kaum auszuführen. Man mußte daher entweder in der Nähe der Detonationsgrenzen arbeiten oder den Ausgangsdruck erniedrigen. Ein Arbeiten in der Nähe der Grenzen wäre aber durch das Auftreten des Spins und anderer Grenzerscheinungen sehr erschwert worden. Es erschien aus diesem Grunde angebrachter, bei niedrigem Ausgangsdruck zu arbeiten.

Die ersten Messungen des Reaktionsablaufes in der Detonationszone wurden im Zusammenhang mit der Untersuchung des Dichteprofils von Kistiakowsky und Mitarbeitern (28, 35) ausgeführt. Sie bestimmten im Hinblick auf den Reaktionsablauf in Knallgasdetonationen bei Ausgangsdrucken von 30 bis 90 mm Hg Reaktionszeiten. Die Frage der Reaktionseinleitung konnte Kistiakowsky nicht genau klären, da das räumliche Auflösungsvermögen der Meßanordnung nicht hoch genug war. Es konnten daher u.a. keine Induktionszeiten bestimmt werden.

Zur Aufklärung der Dichteänderungen direkt hinter der Stoßfront trugen Jost, Just und Wagner (38) bei. Sie bestimmten mit Hilfe einer abgeänderten Schlierenanordnung Dichtegradienten in Knallgasdetonationen. Aus den Messungen folgte, daß die Dichte direkt hinter der Stoßfront für einige Zeit konstant blieb und erst nach einer sog. "Induktionszeit" eine merkliche Dichteänderung infolge der chemischen Reaktion eintrat. Die Induktionszeiten lagen in der Größenordnung von 1 μsec (gemessen im Laborsystem).

Die Messungen des Dichteprofils und die reaktionskinetischen Messungen zeigten, daß sich hinter der Stoßfront zunächst ein Gleichgewichtszustand einstellt, der auf der Hugoniotkurve (Fig. 2) für das unverbrannte Gas liegt. Nach einer Induktionszeit, für deren Länge die Reaktionsgeschwindigkeit der Einleitungsreaktionen ausschlaggebend ist, erfolgt die Zustandsänderung in Richtung des Gleichgewichts am Chapman-Jouguet-Punkt, der auf der Hugoniotkurve für das verbrannte Gas (Schwaden) liegt. Für die Länge der Reaktionszone ist dabei die Reaktionsgeschwindigkeit unter den in der Detonationszone herrschenden Bedingungen maßgebend.



Figur 2: Schematische Darstellung der Hugoniotkurven für das unverbrannte und das verbrannte Gas. Die eingezeichnete Gerade ist die Rayleigh-Gerade.

Auf dem Gebiet der Anlaufvorgänge erschienen in neuerer Zeit Arbeiten von Jost und Schüller (43), Baumann und Oppenheim (39), Baumann und Wagner (40), Martin und White (41) und Oppenheim und Mitarbeiter (42). - Jost und Schüller untersuchten eingehend den Übergang einer Flamme in eine Detonation in Rohren. Sie fotografierten dazu den Anlaufvorgang einerseits im Eigenlicht mit einer Trommelkamera und andererseits stellten sie Momentaufnahmen mit einer Schlierenoptik her. Die Schlierenaufnahmen zeigten, daß die Flammenfront in Äthan-Sauerstoff-Gemischen (5 Vol% Äthan) Ansätze zur Turbulenz aufweist, und daß die Flammenfront aus mehreren Wülsten besteht, zwischen denen sich Zonen unverbrannten Gases befinden. - Baumann und Oppenheim bzw. Baumann und Wagner untersuchten Anlaufvorgänge in stöchiometrischen Knallgas- bzw. Äthylen-Sauerstoff-Gemischen, und zwar fotografierten sie den Anlaufvorgang im Eigenlicht mit einer Trommelkamera. Aus den Aufnahmen ermittelten sie u.a. den Anlaufweg und die Anlaufzeit bis zum Übergang der Flamme in eine Detonation. Es zeigte sich, daß die Anlaufgeschwindigkeit, d.i. der Quotient aus Anlaufweg und Anlaufzeit, für Rohrdurchmesser größer als 1 cm konstant ist. - Außerdem gelang es Wagner bei Kenntnis der Flammengeschwindigkeit die Anlaufstrecke zu be-

rechnen. - Martin und White und Oppenheim und Mitarbeiter untersuchten ebenfalls den Mechanismus des Überganges einer Flamme in eine Detonation. Sie beobachteten dazu Anlaufvorgänge mit einer Schlierenapparatur bzw. einem Interferometer. - Oppenheim und Stern (44) versuchten mit Hilfe der Charakteristikenmethode, den Anlauf einer Detonation rechnerisch zu verfolgen.

Im Zusammenhang mit der Stabilität einer Detonation erschienen Arbeiten von Toennies und Wagner (45), Manson und Mitarbeitern (46), Peck und Thrap (47) und Kistiakowsky (48). - Toennies und Wagner untersuchten vor allem spinnende Detonationen mit einer Trommelkamera. Der Film bewegte sich dabei entweder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Detonation oder parallel zu ihr ungefähr mit der Geschwindigkeit des Bildes der Detonationsfront auf dem Film. - Manson und Mitarbeiter untersuchten ebenfalls spinnende Detonationen und bestimmten die Abhängigkeit der Detonationsgeschwindigkeit vom Rohrdurchmesser. Für diese letzte Frage interessierten sich auch Peck und Thrap und Kistiakowsky.

Theoretische Arbeiten über die Abhängigkeit der Detonationsgeschwindigkeit vom Rohrdurchmesser erschienen von Manson (49), Fay (50) und Döring und Schön (51). - Die Untersuchungen ergaben alle einen linearen Zusammenhang zwischen der Detonationsgeschwindigkeit "D" und dem reziproken Rohrdurchmesser "1/d", und zwar in der Form $D = D_{\infty}(1 - a/d)$. Darin sind: D = Detonationsgeschwindigkeit, D_{∞} = Detonationsgeschwindigkeit für unendlichen Rohrdurchmesser, d = Rohrdurchmesser, a = Konstante von der Größenordnung 0,1 mm, die allerdings von der Gemischzusammensetzung abhängt.

2 Das Sachgebiet

In der vorliegenden Arbeit wird über experimentelle und theoretische Untersuchungen der Detonationsgrenzen explosibler Gasgemische berichtet. Es soll daher zunächst ein Überblick über die mit den Grenzerscheinungen zusam-

menhängenden Fragen und über die bisherigen Ergebnisse der experimentellen und theoretischen Untersuchungen der Detonationsgrenzen gegeben werden.

I 2a Zündung eines explosiblen Gasgemisches durch eine Stoßwelle

Im Zusammenhang mit den Detonationsgrenzen interessiert vor allem die Frage nach der Zündung eines explosiblen Gasgemisches durch eine Stoßwelle. - Läuft eine Stoßwelle in ein explosibles Gasgemisch, so wird das Gas durch die Stoßwelle überadiabatisch komprimiert und dadurch auf eine hohe Temperatur gebracht. Handelt es sich dabei um eine schwache Stoßwelle, so erfolgt die Kompression nahezu isentrop, d.h. unter dieser Bedingung sollte die Entzündung des Gasgemisches wie bei einer adiabatischen Kompression verlaufen. Bei der adiabatischen Kompression wird allerdings das ganze Gasvolumen gleichmäßig erhitzt, während bei der Kompression durch eine Stoßwelle immer nur eine Zone von der Dicke einiger mittlerer freier Weglängen (17, 52) erhitzt wird. Daher spielt bei der Zündung durch eine Stoßwelle die Frage eine Rolle, wie sich die verschiedenen Freiheitsgrade einer Molekel (Translation, Rotation und Schwingung) bei der plötzlichen Zustandsänderung verhalten. Es ist also zu klären, wie sich in einem Gas, das von einer Stoßwelle komprimiert worden ist, der neue Gleichgewichtzustand einstellt. Experimentelle Untersuchungen zeigten (53, 54, 55), daß die verschiedenen Freiheitsgrade einer Molekel unterschiedliche Zeiten bis zum Erreichen eines Gleichgewichtszustandes (Boltzmannverteilung in Bezug auf die einzelnen Freiheitsgrade) benötigen. So stellt sich das Gleichgewicht der Translationsfreiheitsgrade nach ungefähr 4 bis 5 Molekelstößen (10^{-10} bis 10^{-9} sec) ein, während die Rotations-[1] und Schwingungsfreiheitsgrade erst nach 10^{-8}

[1] Hornig und Mitarbeiter (53, 93) fanden bei der Untersuchung der Rotationsrelaxation an H_2, O_2 und N_2 mit schwachen Stoßwellen, daß das Gleichgewicht bei O_2 und N_2 nach ungefähr 20 Molekelstößen eingestellt ist, bei H_2 nach ungefähr 150.

bis 10^{-5} sec den Gleichgewichtszustand erreichen. Daraus folgt aber, daß die Temperatur hinter der Stoßfront zunächst höher ist, als es dem Gleichgewichtszustand des nichtreagierten Gases entsprechen würde. Das könnte dazu führen, daß die chemische Reaktion der zunächst höheren Temperatur entsprechend initiiert würde. Da man aber die Temperatur hinter einer Stoßfront unter der Annahme thermodynamischen Gleichgewichtes in bezug auf alle Freiheitsgrade berechnet, könnte so eine niedrigere Zündtemperatur gegenüber der adiabatischen Kompression vorgetäuscht werden.

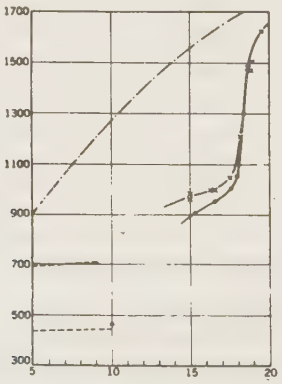
Aus Experimenten über adiabatische Kompression (56, 57) ist nun bekannt, daß die Zündung (Explosion) eines explosiblen Gasgemisches nicht sofort nach der Kompression erfolgt, sondern daß eine sog. Induktionszeit verstreicht. Während dieser Induktionszeit bleibt der Zustand des Gases praktisch konstant, d.h. Druck, Temperatur, Dichte u.s.w. ändern sich nicht merklich. Nach der Induktionszeit setzt dann die Explosion ein, wenn durch die Kompression eine entsprechende Temperatur erreicht worden ist. - Die Induktionszeiten sind temperaturabhängig, und zwar läßt sich die Temperaturabhängigkeit bei konstantem Druck und konstanter Zusammensetzung gut durch die Beziehung $\tau = \tau_c \exp(E/RT)$ wiedergeben. Darin sind E eine Aktivierungsenergie, R die Gaskonstante und T die absolute Temperatur. - Ferner beobachtet man Zündgrenzen, d.h. Gasgemische bestimmter Zusammensetzung explodieren bei gleichem Enddruck nicht mehr unterhalb einer bestimmten Temperatur (Zündtemperatur, Explosionsgrenze).

Betrachtet man nun die von vielen Forschern (58, 59, 60, 61) untersuchte Zündung eines Gasgemisches mit einer Stoßwelle und faßt die Ergebnisse zusammen, so ergibt sich im großen und ganzen eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der adiabatischen Kompression. So konnte z.B. Spener (62) bei Experimenten an H_2-, Hexan-, Heptan- und Äther-Sauerstoff-Gemischen keine Zündung mehr beobachten, wenn die Temperatur hinter der Stoßfront niedriger war, als die mit Hilfe der adiabatischen Kompression bestimm-

te Zündtemperatur. - Aus den Experimenten folgt somit, daß die Zündung durch eine Stoßwelle wegen der damit verbundenen Temperaturerhöhung erfolgt, und zwar entsprechend der Gleichgewichtstemperatur in bezug auf alle Freiheitsgrade. Die Zündung durch eine Stoßwelle entspricht somit derjenigen durch die adiabatische Kompression.

I 2b Detonationsgrenzen

Wie oben erwähnt (S. 2) untersuchte Wendlandt eingehend die Detonationsgrenzen, und zwar von Knallgas-Stickstoff-, CO-O_2- und CO-O_2-H_2-Gemischen. Zur experimentellen Bestimmung der Grenzen verwandte er ein Detonationsrohr von ungefähr 10 mm Innendurchmesser und bestimmte mit einer chronoelektrischen Meßstrecke die Detonationsgeschwindigkeit als Funktion der Gemischzusammensetzung. Dabei beobachtete er, daß die Geschwindigkeit magerer Gemische bei Verringerung des Brenngasgehaltes plötzlich stark abfiel (Fig. 3) und sich bei weiterer Verringerung des Brenngasgehaltes nur noch Flammen ausbreiteten, bis überhaupt keine Verbrennung mehr eintrat. - Wendlandt berechnete dann die Detonationsgeschwindigkeiten mit Hilfe der Theorie von Chapman-Jouguet, und zwar auch für Gemische, bei denen er keine Detonation mehr beobachten



Figur 3: Detonationsgeschwindigkeit als Funktion der Gemischzusammensetzung (nach Wendlandt). -•-•- = theoretische Detonationsgeschwindigkeit, ausgezogene Kurven = beobachtete Geschwindigkeit.

konnte. Außerdem errechnete er die Temperaturen[1] hinter den Stoßfronten der entsprechenden Detonationen und stellte fest, daß die Temperaturen hinter den Stoßfronten an den Detonationsgrenzen in der Größenordnung der für die Gasgemische bekannten Zündtemperaturen lagen (z.B. 800-900°C bei Knallgas). Auf Grund dieser Feststellungen deutete Wendlandt die Detonationsgrenzen als "Zündgrenzen".- Diese Ergebnisse stehen im Einklang mit späteren Messungen, die Gordon, Mooradian und Harper (63) in einem etwas anderen Zusammenhang ausführten. Sie untersuchten nämlich an stöchiometrischen und nicht-stöchiometrischen Knallgas-gemischen, denen sie Argon oder Helium zusetzten, die Druckabhängigkeit der Detonationsgrenzen. Zur Bestimmung der Grenzen fotografierten sie die Detonationen mit einer Trommelkamera. Sie stellten für Ausgangsdrucke unter einer Atmosphäre eine Druckabhängigkeit der Grenzen fest, und zwar wurde der Detonationsbereich mit abnehmendem Ausgangsdruck eingeengt. Die Argon- bzw. Heliumzusätze erweiterten bei gleichem Ausgangsdruck den Detonationsbereich. Ferner beobachteten die Forscher, daß in der Nähe der Detonationsgrenzen immer Spin auftrat. - Eine Berechnung der Temperaturen hinter den Stoßfronten der entsprechenden Detonationen ergab wieder, daß sie in der Nähe der Zündtemperaturen für Knallgas ($\sim$ 1100°K) lagen. Der Einfluß der Argon- bzw. Heliumzusätze konnte daher so gedeutet werden, daß Argon und Helium auf Grund ihrer geringeren spezifischen Wärmen zu höheren Temperaturen hinter einer Stoßfront gleicher Machzahl führen.

Untersuchungen der Detonationsgrenzen von Jost und Schüller (43) an den Dreikomponentensystemen H_2-O_2-N_2 und C_2H_2-O_2-N_2 stützten ebenfalls die Annahme, daß die Detonationsgrenzen allein durch kinetische Faktoren bestimmt werden. Jost und Schüller bestimmten die Detonationsgeschwindigkeit mit einer chronoelektrischen Meßstrecke in einem Rohr von 15 mm Innendurchmesser und fanden, daß die Detonationsgrenzen in beiden Systemen praktisch nicht von der Inertgaskonzentration abhingen. Das

[1] Die Genauigkeit der Temperaturberechnung ist allerdings nicht sehr groß, da die spezifischen Wärmen der Gase bei den entsprechenden Temperaturen noch nicht bekannt waren.

ist unter der Voraussetzung, daß es sich um kinetische Ursachen handelt, auch verständlich. An den Detonationsgrenzen überwiegt nämlich immer eine der beiden Komponenten H_2 oder O_2, so daß ein Zusatz von N_2 praktisch einem Austausch von H_2 bzw. O_2 gegen N_2 gleichkommt. Nun unterscheiden sich diese drei Gase aber nicht sehr in ihren thermodynamischen Eigenschaften, so daß auch die thermodynamischen Eigenschaften des Gasgemisches kaum geändert werden. Das bedeutet aber, daß der Austausch der im Überschuß vorhandenen Komponente gegen N_2 zu keiner wesentlichen Temperaturänderung hinter der entsprechenden Stoßfront führt. - Zusätzlich prüften Jost und Schüller die Abhängigkeit der Detonationsgrenzen von der Stärke der Zündung (Initialstoßwelle). Es zeigte sich, daß die Grenzen nur unwesentlich von der Initiierung abhängen.

Im Anschluß an die Untersuchungen der Detonationsgrenzen von Wendlandt diskutierte Döring (23) den Einfluß des Rohrdurchmessers auf die Ausbreitung einer Detonation. Er wies darauf hin, daß durch die Wärmeleitung an die Wand Energieverluste innerhalb der Reaktionszone auftreten können und somit die Detonationsgeschwindigkeit herabgesetzt werden kann. - Wagner (64, 65) nahm diesen Gedankengang wieder auf und konnte zeigen, daß Störungen in die Reaktionszone hinter der Stoßfront eindringen können, die energieverzehrend wirken. - Er schätzte ab, daß der Einfluß dieser Störungen auf die Ausbreitung einer Detonation allerdings praktisch nur in der Nähe der Detonationsgrenzen von Bedeutung ist.

I 3 Zusammenfassung und Aufgabenstellung

Die bisherigen experimentellen Untersuchungen der Detonationsgrenzen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Die Detonationsgrenze erscheint als Sprung in der Geschwindigkeit. Die Abweichung der gemessenen von der berechneten Detonationsgeschwindigkeit ist dabei für detonierende Gemische auch an der Grenze verhältnismäßig gering. Die Grenzen selbst scheinen in nicht zu engen Rohren durch die Kinetik allein bestimmt zu werden. In der Nähe der Grenzen tritt immer Spin auf. - Außerhalb der Detonationsgrenzen kann sich, wie von Jost und Schüller (43)

festgestellt wurde, noch über sehr lange Strecken eine von einer Flamme unterstützte Stoßwelle fortpflanzen. In einem sehr schmalen Konzentrationsbereich an den Grenzen fand Wagner (64) detonationsähnliche Vorgänge, die, auf kurzen Strecken beobachtet, wie stabile Detonationen erscheinen, sich in Wirklichkeit aber mit schwankender Geschwindigkeit ausbreiten. Neuere Untersuchungen von Manson (66) haben gezeigt, daß die Schwankungen der Geschwindigkeit der Reaktionszone streng periodisch verlaufen können und damit der von Jost (19, 84) vorgeschlagenen Deutung des Spins entsprechen. - Über den Einfluß des Rohrdurchmessers auf die Detonationsgrenzen läßt sich nichts aussagen, da darüber bisher keine Messungen vorliegen. Da aber ein Einfluß des Rohrdurchmessers auf die Detonationsgeschwindigkeit (46, 47, 48) gefunden worden ist, sollte nach einem Modell von Just und Wagner auch eine Abhängigkeit der Detonationsgrenzen vom Rohrdurchmesser existieren.

Es sollte daher in der vorliegenden Arbeit zunächst die Abhängigkeit der Detonationsgrenzen vom Rohrdurchmesser untersucht werden. Dabei stellte sich nun heraus, daß für die untersuchten explosiblen Gasgemische eine Abhängigkeit der Detonationsgrenzen vom Rohrdurchmesser besteht. - Im Anschluß an die experimentellen Ergebnisse sollte dann der Versuch unternommen werden, den Einfluß des Rohrdurchmessers auf die Grenzen zu erklären. Dabei stellte es sich heraus, daß die Behandlung dieser Aufgabe auf die Lösung eines Randwertproblems hinausläuft, und zwar muß die Ausbreitung einer Detonation unter Berücksichtigung der ruhenden Rohrwand untersucht werden. Die ruhende Rohrwand beeinflußt die Strömung, indem sie zur Bildung einer Grenzschicht hinter der Stoßfront führt. Dadurch werden die Gase, die nach dem Durchgang der Detonationsfront in Bewegung gesetzt worden sind, an der Wand abgebremst, und es entstehen Kompressions- und Expansionswellen von der Wand her. Diese Wellen können zur Ausbildung schräger Stöße führen, die dann die Stoßfront der Detonation beeinflussen. Es bleibt dann die Frage, ob sich ein stationärer Zustand einstellt. - Sucht man eine stationäre Lösung

dieses Problems, so kann man die Aufgabe in einem Koordinatensystem behandeln, daß sich mit der Geschwindigkeit der Stoßfront (Detonationsgeschwindigkeit) bewegt, in dem also die Stoßfront ruht (Fig. 4). Dabei erhält die Rohrwand eine Geschwindigkeit, die gleich der Detonationsgeschwindigkeit "D" ist, und zwar in Richtung der positiven x-Achse, wenn man die x-Achse mit der Rohrachse zusammenfallen läßt.

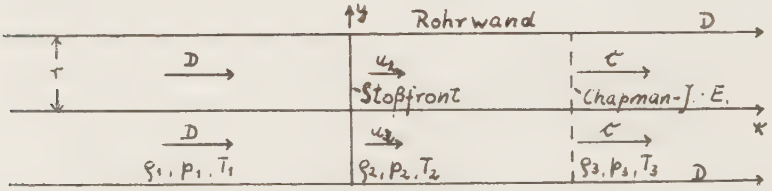


Fig. 4: Schematische Darstellung der Strömungsverhältnisse bei der Ausbreitung einer Detonation in einem Rohr. Die Detonationsfront ruht in dem gewählten Koordinatensystem.

Wie steht es nun in diesem Koordinatensystem mit der Strömungsgeschwindigkeit der Gase hinter der Stoßfront? - Die Gase strömen von der Stoßfront weg in Richtung der positiven x-Achse mit Unterschallgeschwindigkeit, wenn man zunächst einmal den Einfluß der Rohrwand unberücksichtigt läßt. Nach Ablauf der chemischen Reaktion erreicht das Gas am Chapman-Jouguet-Punkt Schallgeschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der Wand ist nun, wie erwähnt, $D = \frac{v}{v}\frac{1}{2} \cdot c$, wobei "c" die Schallgeschwindigkeit der Gase am Chapman-Jouguet-Punkt ist und $v_1/v_2 > 1$ das Kompressionsverhältnis (v_1= spezifisches Volumen vor der Stoßfront, $v_2 = 1/\rho_2$ = spezifisches Volumen der Gase am Chapman-Jouguet-Punkt). Das bedeutet aber, daß sich die Rohrwand in diesem Bezugssystem mit Überschallgeschwindigkeit bewegt; denn die Schallgeschwindigkeit der Gase in der Reaktionszone ist kleiner als am Chapman-Jouguet-Punkt und bezogen auf die Schallgeschwindigkeit des Gases am Chapman-Jouguet-Punkt bewegt sich die Rohrwand mit Überschallgeschwindigkeit, da $c < D$. In einem kleinen Gebiet hinter der Stoßfront ist dabei sogar die Relativgeschwindigkeit zwischen Wand und Gas größer als die örtliche Schallgeschwindigkeit. Die Re-

lativgeschwindigkeit v_r ergibt sich nämlich mit "u = Strömungsgeschwindigkeit der Gase" und "D = Detonationsgeschwindigkeit" zu $v_r = D - u$. Nun ist (s. S.) $D = \rho_3/\rho_1 \cdot c$ und $u = \rho_3/\rho_2 \cdot c$, also

$$v_r = \left(\rho_3/\rho_1 - \rho_3/\rho_2\right) c = \rho_3/\rho_1 \left(1 - \rho_1/\rho_2\right) \cdot c$$

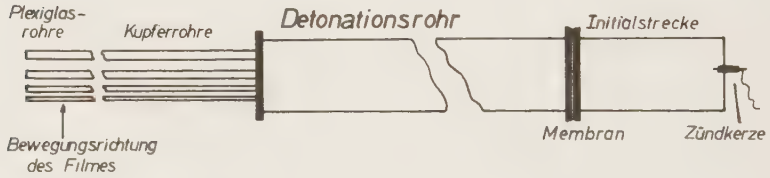
Darin sind nun $\rho_3/\rho_1 \geq 1{,}6$ und $\rho_1/\rho_2 \leq 0{,}3$, so daß $v_r \geq 1{,}1c$. (ρ_1 = Gasdichte vor der Stoßfront, ρ_2 = Gasdichte hinter der Stoßfront, ρ_3 = Gasdichte am Chapman-Jouguet-Punkt). Da die Schallgeschwindigkeit der Gase in der Reaktionszone kleiner als "c" ist, gilt also dort erst recht $v_r > c$'. Die Randwertaufgabe lautet dann: Gibt es eine stationäre Lösung der hydrodynamischen Differentialgleichungen, die bei vorgegebener Machzahl der anströmenden Gase folgende Randbedingungen erfüllt? - Die Randbedingungen sind: $v = D$, $T = T_1$, $p = p_1$, $\rho = \rho_1$ vor der Stoßfront; $v = v_2$, $T = T_2$, $p = p_2$, $\rho = \rho_2$ für $x = 0$ (direkt hinter der Stoßfront) und $v = D$ für $y = \pm r$ (Rohrwand). Dabei sind v die Strömungsgeschwindigkeit, T die absolute Temperatur, p der Druck und ρ die Dichte. Bei der Untersuchung dieser Randwertaufgabe wird sich zeigen, daß eine stationäre Lösung nicht existiert. Dagegen existiert eine quasistationäre Lösung, d.h. die Zustandsgrößen und die Detonationsgeschwindigkeit sind periodische Funktionen der Zeit. Der Spin und die Tatsache, daß die Detonationsgeschwindigkeit vom Rohrdurchmesser kaum abhängt, können aus dem Modell gefolgert werden. Man muß bei der Lösung der Randwertaufgabe vor allem schräge Stöße oder Mach'sche Dreierstoßkonfigurationen berücksichtigen.

II Experimentelle Bestimmung der Detonationsgrenzen

Es wurde die Abhängigkeit der Detonationsgrenzen vom Rohrdurchmesser an den Systemen CH_4-O_2, H_2-O_2 und C_2H_4-O_2 gemessen. Gleichzeitig wurde die Abhängigkeit der Detonationsgeschwindigkeit vom Rohrdurchmesser geprüft. - In weiteren Versuchen wurde dann an den Systemen H_2-O_2-N_2, H_2-O_2-Ar und H_2-O_2-He der Inertgaseinfluß auf die Detonationsgrenzen und ihre Abhängigkeit vom Rohrdurchmesser untersucht.

II 1 Beschreibung der Apparatur

Die Apparatur bestand aus vier 20 m langen Kupferrohren von 4, 6, 10 und 16 mm Innendurchmesser, die so übereinander montiert waren, daß die Rohrachsen in einer Ebene lagen (Figur 5). Das eine Ende der Kupferrohre mündete in ein 2 m langes Messingrohr von 10 cm Innendurchmesser. An dieses Messingrohr schloß sich, durch eine 0,1 mm starke Kunststoffmembran getrennt, die Initialstrecke an. Sie bestand aus einem 0,5 m langen Messingrohr von ebenfalls 10 cm Innendurchmesser. Am anderen Ende der Kupferrohre waren 1,20 m lange Plexiglasrohre angebracht, die jeweils den Innendurchmesser des entsprechenden Kupferrohres hatten. Die Rohre wurden mit Flanschen aneinandergefügt und dabei vor allem auf einen glatten Übergang zwischen den Rohren geachtet.



Schematische Darstellung des Detonationsrohres

II 1a Zündung

Gezündet wurden die Detonationen durch eine Initialdetonation in stöchiometrischem Methan-Sauerstoff in der Initialstrecke. Die Initialdetonation wurde mittels eines Funkens gezündet, der durch Entladen eines auf 300 Volt aufgeladenen Kondensators von 200 µF über eine Autozündspule erzeugt wurde.

II 1b Einstellung der Gemischzusammensetzung

Zur Herstellung der Testgemische wurden Flaschengase verwandt. Die Gase wurden durch das 4-mm-Rohr in die Apparatur eingeleitet und strömten durch die drei anderen Rohre und ein Haber-Löwe-Gasinterferometer gegen Atmosphären-

druck aus. Mit dem Gasinterferometer wurde die Gemischzusammensetzung kontrolliert. Damit alle Rohre ein Gemisch gleicher und konstanter Zusammensetzung enthielten, strömte ein konstanter Gasstrom der gewünschten Zusammensetzung ungefähr eine Stunde durch die Apparatur. Dabei wurde darauf geachtet, daß die Streifenverschiebung im Interferometer nicht mehr als einen halben Streifen betrug.

Zur Herstellung der Dreikomponentensysteme wurde das Inertgas (N_2, Ar oder He) entweder mit Wasserstoff oder Sauerstoff vorgemischt. Dazu wurden die Gase im gewünschten Verhältnis in einen Gasbehälter gedrückt, und der Gasbehälter wurde von außen einseitig geheizt. Dadurch bildete sich in dem Gasgemisch ein Konvektionsstrom aus, der zu einer schnelleren und besseren Durchmischung der Gase führte. Für die Durchmischung der Gase wurde ungefähr ein Zeitraum von vierzehn Tagen benötigt. Danach wurde die Gemischzusammensetzung interferometrisch bestimmt, und zwar strömte dazu ein konstanter Gasstrom durch das Interferometer, und es wurde geprüft, ob die Streifenverschiebung während einer Stunde kleiner als ein halber Streifen blieb. War dies der Fall, so wurde das Gemisch als homogen betrachtet. Ferner wurde die Gemischzusammensetzung vor und nach jedem Versuch kontrolliert.

1c Messung der Detonationsgeschwindigkeit

Die Plexiglasrohre wurden mit einer Trommelkamera fotografiert, die die Rohre im Verhältnis 29,68:1 auf den Film abbildete. Die Abbildung erfolgte so, daß sich der Film senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Detonation bewegte (Fig. 6). Aus der Neigung der Leuchtspur auf dem Film, der Kenntnis des Abbildungsmaßstabes und der Filmgeschwindigkeit, die oszillografisch bestimmt wurde, konnte die Detonationsgeschwindigkeit berechnet werden.

2 Bestimmung der Detonationsgrenzen

Zur Bestimmung der Detonationsgrenzen wurde die Detonation ebenfalls mit einer Trommelkamera fotografiert. Aus den Trommelkameraaufnahmen konnte auf die Stabilität einer Detonation geschlossen werden (Fig. 7). War die De-

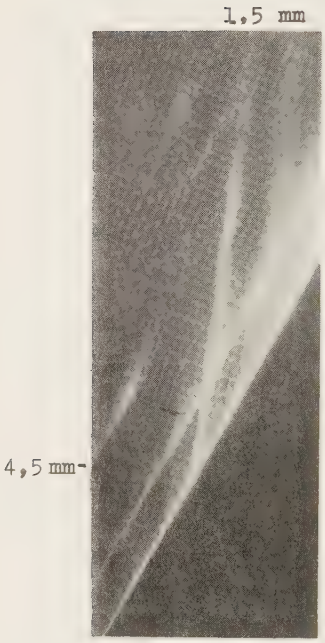


Fig. 7: Trommelkameraaufnahme einiger Detonationen in Rohren von 12, 8, 4.5 un 1.5 mm Durchmesser (12% CH_4)

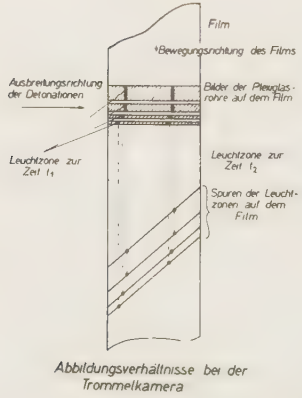


Fig. 6: Abbildungsverhältnisse bei der Trommelkamera

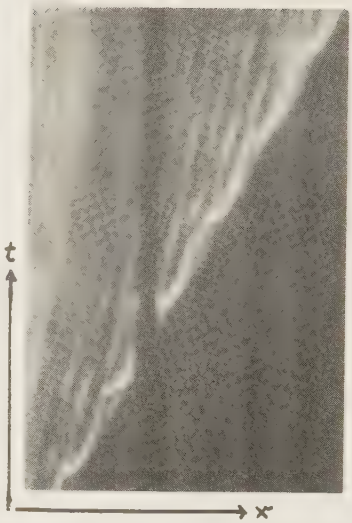


Fig. 9: Spinnende Detonation in einem Äthylen-Sauerstoff-Gemisch (3,9% Äthylen; Rohrdurchmesser 16 mm)

Fig. 10: Anlaufende Detonation in einem Methan-Sauerstoff-Gemisch der Konzentration 23,3% CH_4 und in einem Rohr von 1,5 mm Innendurchmesser

tonation stabil, so hatte die Spur der Leuchtzone auf dem Film konstante Neigung und die daraus berechnete Geschwindigkeit stimmte gut mit theoretischen Detonationsgeschwinkeiten überein (Fig. 8). Näherte man sich mit der Gemischzusammensetzung der Stabilitätsgrenze, so beobachtete man zunächst spinnende Detonationen (Fig. 9), deren konstante mittlere Ausbreitungsgeschwindigkeit ebenfalls mit der theoretisch berechneten übereinstimmte. Bei weiterer Annäherung an die Grenzen traten zunächst in den Rohren kleineren Durchmessers anlaufende Detonationen auf (Fig.10), die allerdings nirgends in eine stabile Detonation übergingen. Änderte man die Konzentration weiter in Richtung auf die Grenzen, so breiteten sich zunächst noch beschleunigte Flammen in den Rohren aus, bis man einen Konzentrationsbereich erreichte, in dem keine Verbrennungserscheinungen mehr zu beobachten waren.

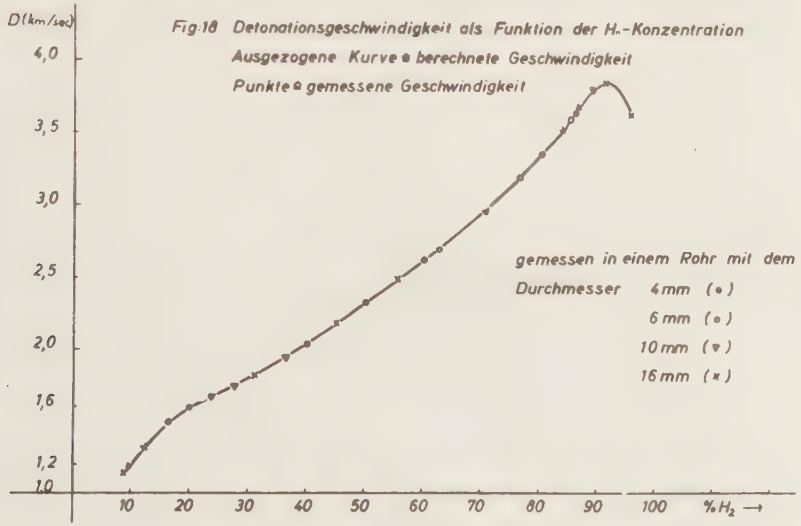


Fig.18 Detonationsgeschwindigkeit als Funktion der H.-Konzentration
Ausgezogene Kurve ● berechnete Geschwindigkeit
Punkte ● gemessene Geschwindigkeit

Es wurden nun jeweils die Konzentrationen bestimmt, bei denen keine Detonation mehr zu beobachten war und die Konzentration, bei der gerade noch eine stabile Detonation auftrat. Die Ergebnisse sind in Figur 11 wiedergegeben. In der Figur ist die Grenzkonzentration des Brenngases als Funktion des reziproken Grenzdurchmessers aufgetragen. Man entnimmt aus der Figur, daß die Grenzen vom Rohrdurchmesser abhängen und ein linearer Zusammenhang zwischen der

Grenzkonzentration und dem reziproken Rohrdurchmesser besteht. - In weiteren Versuchen wurden die Detonationsgrenzen der Dreikomponentensysteme (S. 15) bestimmt. Die Ergebnisse sind in den Figuren 12, 13 und 14 wiedergegeben. - Wie man sieht, ändert sich die Detonationsgrenze des Knallgases bei Inertgaszusatz, und zwar nimmt bei den verwendeten Inertgasen (N_2, Ar und He) an der unteren Grenze die H_2-Grenzkonzentration, an der oberen dagegen die O_2-Grenzkonzentration mit zunehmendem Inertgasgehalt ab. Dieser Einfluß ist um so größer, je kleiner der Rohrdurchmesser ist. So ändert sich im System H_2-O_2-N_2 die

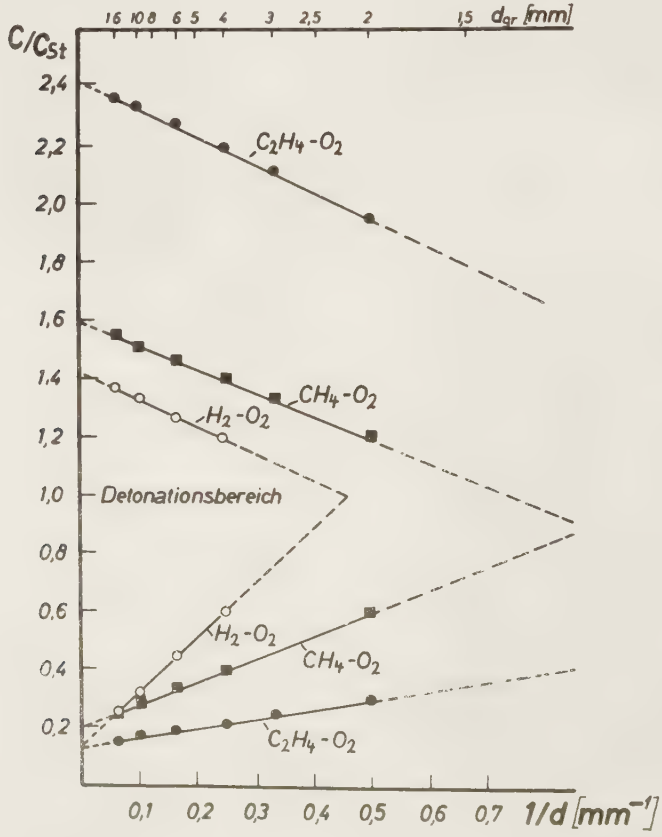


Fig. 11 Detonationsgrenzen als Funktion des reziproken Rohrdurchmessers

H_2-Grenzkonzentration an der unteren Grenze im 4-mm-Rohr gleichmäßig von 40% H_2 bei reinem Knallgas auf 30% H_2 bei einem Gemisch mit 55% N_2, also im ganzen um 10% H_2. Im 16-mm-Rohr ändert sich dagegen die H_2-Grenzkonzentration im gleichen Bereich nur noch um 3% H_2. - Wesentlich anders ist der Einfluß von Argon und Helium auf die Detonationsgrenzen. Hier setzten zunächst geringe Zusätze (~6% Inertgas) die H_2-Grenzkonzentration beträchtlich herunter. Zusätze von ungefähr 20% Ar bzw He erniedrigen die H_2-Grenzkonzentration für das 4-mm-Rohr um 17% H_2. - Setzt man noch mehr Inertgas zu, so beobachtet man bei Argon-Knallgasgemischen eine weitere starke Abnahme der H_2-Grenzkonzentration (~10% H_2 bei einem Zusatz von 81,5% Argon), während bei den entsprechenden He-Knallgasgemischen die H_2-Grenzkonzentration ziemlich konstant bleibt (~2% Änderung bis zu einem He-Gehalt von 70%).

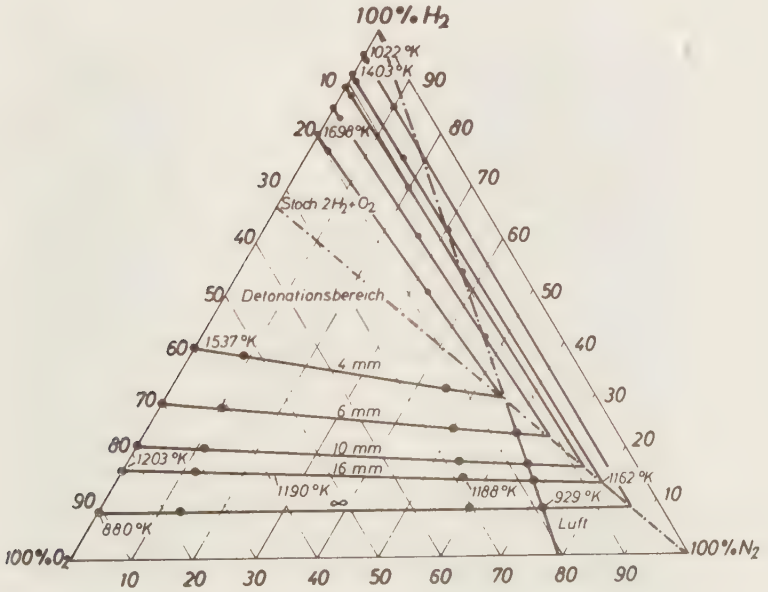
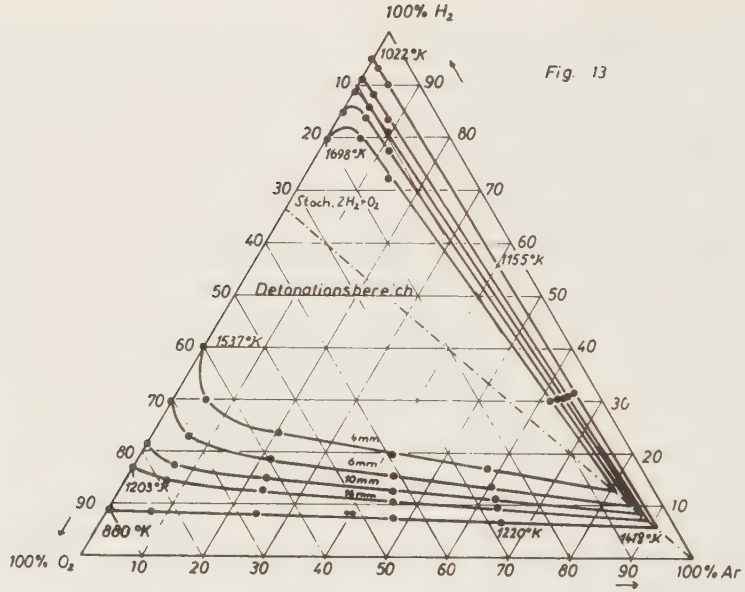


Fig. 12 Detonationsgrenzen im System H_2-O_2-N_2 Rohrdurchmesser als Parameter



Detonationsgrenzen im System H_2-O_2-Ar
Rohrdurchmesser als Parameter

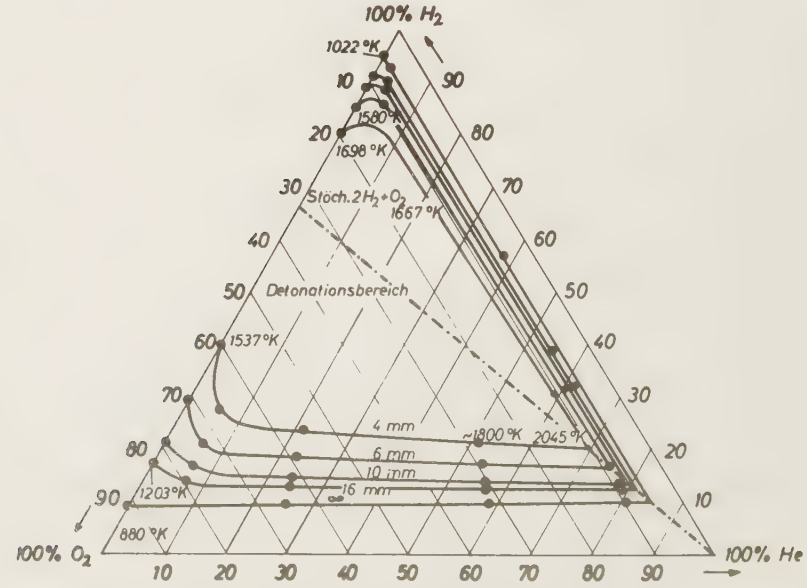


Fig. 14 Detonationsgrenzen im System H_2 -O_2 -He
Rohrdurchmesser als Parameter

3 Auswertung der Meßergebnisse

Betrachtet man zunächst die Abhängigkeit der Detonationsgeschwindigkeit vom Rohrdurchmesser (Fig. 15), so sieht man, daß die Detonationsgeschwindigkeit auch in unmittelbarer Nähe der Grenzen in allen Rohren praktisch gleich ist. Eine genauere Ausmessung ergibt, daß die Unterschiede der Detonationsgeschwindigkeiten in den einzelnen Rohren in der Größenordnung der Meßgenauigkeit in bezug auf die Geschwindigkeit liegen, die ungefähr 1% beträgt. Es ergibt sich also keine meßbare Abhängigkeit der Detonationsgeschwindigkeit vom Rohrdurchmesser.

Die gefundenen Detonationsgrenzen stimmen bei entsprechendem Rohrdurchmesser im großen und ganzen mit den aus der Literatur (34, 67) bekannten Werten überein. - Die Grenzkonzentrationen für Knallgas, H_2-O_2-N_2 und Äthylen-Sauerstoff im 16-mm-Rohr entsprechen den von Schüller (43) unter ähnlichen Bedingungen gefundenen Werten.

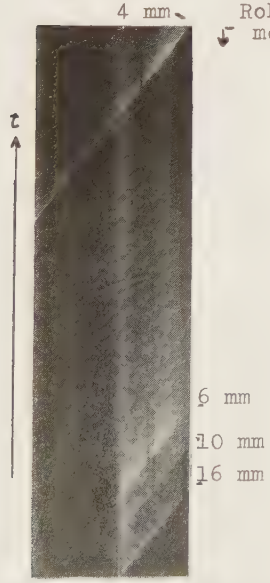


Fig. 15a: Stabile spinnende Detonationen in einem Äthylen-Sauerstoff-Gemisch der Konzentration 50,4% C_2H_4

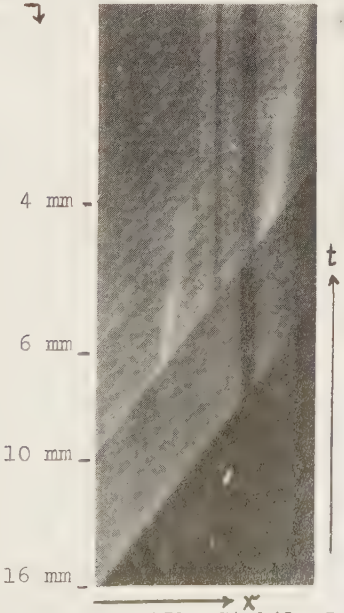


Fig. 15b: Stabile Detonationen in Knallgas; 75,3% H_2.

Extrapoliert man die erhaltenen Meßkurven der Figur 11 (S. 20) unter der Annahme, daß die gefundene lineare Beziehung zwischen der Grenzkonzentration und dem reziproken Grenzdurchmesser auch zu größeren Durchmessern hin gilt, auf $d \to \infty$, so erhält man die in Tabelle I zusammengestellten endlichen Grenzkonzentrationen.

Tabelle I

Gemisch	magere Grenze	fette Grenze
$H_2 - O_2$	9,0% H_2	95,3% H_2
H_2 - Luft	9,0% H_2	76,5% H_2
$CH_4 - O_2$	6,7% CH_4	53,0% CH_4
$C_2H_4 - O_2$	3,3% C_2H_4	61,0% C_2H_4

Berechnet man für diese in Tabelle I angegebenen Gemische die Zustandsgrößen in der Chapman-Jouguet-Ebene und die Detonationsgeschwindigkeiten, so erhält man für die Temperatur und den Druck hinter der Stoßfront der entsprechenden Detonationen die in der folgenden Tabelle II zusammengestellten Werte.

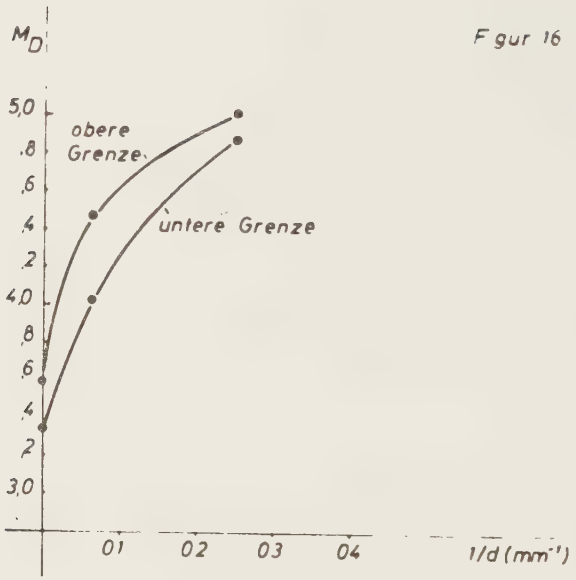
Tabelle II

Gemisch	D (km/sec)	M -	T_{St} (^oK)	T_{Ch-J} (^oK)	P_{St} (at)	P_{Ch-J} (at)
$9\ H_2 + 91\ O_2$	1,150	3,3	880	1360	13,0	7,2
$9\ H_2 + 19\ O_2 + 72\ N_2$	1,240	3,4	929	1414	13,6	7,5
$95{,}3\ H_2 + 4{,}7\ O_2$	3,626	3,6	1022	1555	11,8	8,2
$76\ H_2 + 5\ O_2 + 19\ N_2$	2,343	3,6	1036	1600	15,5	8,5
$6{,}7\ CH_4 + 93{,}3\ O_2$	1,552	4,6	1325	2375	26,0	13,8
$3{,}3\ C_2H_4 + 96{,}7\ O_2$	1,411	4,3	1190	2048	21,9	11,7

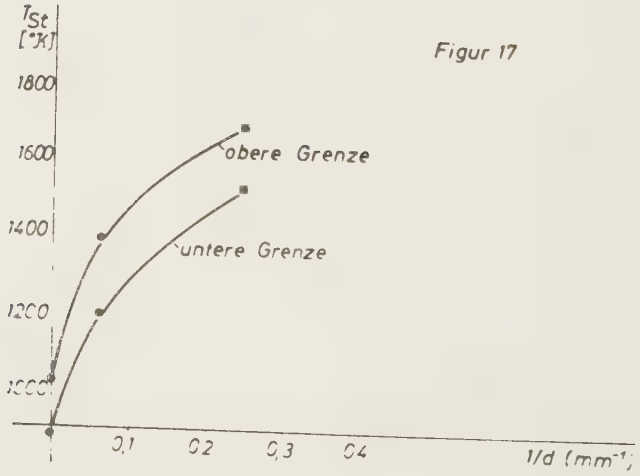
Zeichen: D = Detonationsgeschwindigkeit; M = Machzahl ($M = D/c$, c = Schallgeschwindigkeit im ruhenden Gas vor der Stoßfront); T_{St} = Temperatur hinter der Stoßfront der Detonation; T_{Ch-J} = Temperatur am Chapman-Jouguet-Punkt; P_{St} = Druck hinter der Stoßfront; P_{Ch-J} = Druck am Chapman-Jouguet-Punkt.

Wenn die Extrapolation auf $d \to \infty$ zulässig ist, dann kann man die in Tabelle I aufgeführten Werte als Grenzen für die Ausbreitung einer Detonation, auf die keine Störungen von außen wirken, ansehen. Aus Tabelle II geht dann hervor, daß für diese Detonationen die Temperaturen hinter der Stoßfront in der Nähe der bekannten Zündtemperaturen liegen. So liegt z.B. für die Detonationen in H_2-O_2 und in H_2-Luft die Temperatur hinter der Stoßfront zwischen 600 und 800°C, und zwar sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze. Daraus darf man vielleicht schließen, daß die Detonationsgrenzen bei Detonationen auf die keine Störungen von außen (Wand) einwirken mit den Zündgrenzen zusammenfallen.

Betrachtet man nun den Verlauf der Detonationsgeschwindigkeit längs einer Grenzkurve in Figur 11 (S. 20), so ergibt sich (Fig. 16) eine Zunahme der Detonationsgeschwindigkeit bzw. Machzahl längs der Grenzkurve zu kleineren Rohrdurchmessern hin. Daraus folgt unter der Annahme einer ebenen Stoßfront, daß die Temperatur hinter der Stoßfront der entsprechenden Detonation auf einer Grenzkurve zu kleineren Durchmessern hin ansteigt. Wollte man nun die Vorstellung der Detonationsgrenzen als "Zündgrenzen" beibehalten, so müßte die Temperatur hinter der Stoßfront längs einer Grenzkurve ungefähr konstant bleiben. Das wäre aber nur möglich, wenn die Detonationsgeschwindigkeit in engen Rohren stark vom Rohrdurchmesser abhinge, und zwar sehr viel stärker, als es die für hinreichend weite Rohre bekannte Beziehung $D = D_\infty (1 - a/r)$ (S. 7) verlangt. Die hier beschriebenen Versuche lassen aber, wie erwähnt (S. 23), einen derartig verstärkten Einfluß des Rohrdurchmessers auf die Detonationsgeschwindigkeit nicht erkennen. Diese Überlegungen gelten unter der Voraussetzung, daß jede Störung hinter der Detonationsfront, die zu einer Temperaturerniedrigung führt, auch die Detonationsgeschwindigkeit beeinflußt. Das ist eine Bedingung, die, wie sich zeigen wird, nicht erfüllt zu sein braucht. - Berechnet man nun wieder unter der Voraussetzung, daß die Stoßfront eben ist, die Temperaturen hinter der Stoßfront für Detonationen längs der Kurven in Figur 11, so erhält



Figur 16



Figur 17

man die in Figur 17 wiedergegebenen Werte. Danach würden die "Induktionszeiten" für das Einsetzen der chemischen Reaktion hinter der Stoßfront, die ja hauptsächlich durch die dort herrschende Temperatur bestimmt werden, längs der Grenzkurve zu engeren Rohren hin beträchtlich verkürzt. Man würde damit zu der Folgerung gezwungen, daß in engen Rohren die Einleitung der chemischen Reaktion nicht der unmittelbar entscheidende Faktor für die Stabilität einer Detonation ist.

Wendet man sich nun den Dreikomponentensystemen zu und legt zunächst einmal Linien konstanten Inertgasgehaltes durch die Grenzkurven und trägt die so erhaltenen Werte c/c_{St} (c = H_2-Grenzkonzentration, c_{St}= H_2-Konzentration im stöchiometrischen H_2-O_2-Inertgasgemisch) als Funktion des reziproken Grenzdurchmessers auf, so erhält man die Geradenscharen der Figuren 18, 19 und 20. Aus diesen Darstellungen ersieht man deutlich den besonderen Einfluß der Edelgase Helium und Argon, der sich in den Neigungen der Geraden ausdrückt. Während nämlich im System H_2-O_2-N_2 die Neigung der Grenzgeraden mit zunehmendem Inertgasgehalt stetig zunimmt, durchläuft die Neigung der Grenzgeraden für die beiden anderen Systeme ein Minimum. Da nun die Neigung der Grenzgeraden ein Maß für den Einfluß des Rohrdurchmessers auf die Detonationsgrenzen ist, folgt aus diesem Ergebnis, daß im System H_2-O_2-N_2 der Durchmessereinfluß mit zunehmendem Stickstoffgehalt wächst, während er in den beiden anderen Systemen ein Minimum durchläuft.

Ferner ist bemerkenswert, daß sich die Neigungen der Grenzgeraden im c/c_{St}-$1/d$-Diagramm für die untere und obere Grenze wie 2:1 verhalten. Man findet nämlich für die Grenzkonzentration bei gleichem Rohrdurchmesser folgende Beziehung:

$$2\, c_o + c_u = 3\, c_{St}$$

Darin sind c_o die Grenzkonzentration des Brenngases an der oberen Grenze und c_u die Grenzkonzentration an der unteren Grenze; c_{St} ist die Wasserstoffkonzentration im stöchiometrischen Knallgas-Inertgasgemisch. Eine Folge-

rung aus dieser Beziehung erbibt sich, wenn man berücksichtigt, daß die Konzentration des Wasserstoffs an der Grenze ein Maß für die verfügbare Wärmemenge ist. An der unteren Grenze gilt nämlich, da dort Sauerstoff im Überschuß vorhanden ist, $c \sim Q_{H_2O}$. Q_{H_2O} ist die Bildungsenthalpie für ein Mol H_2O; ein Mol Wasserstoff liefert bei vollständiger Umsetzung ein Mol Wasser. An der oberen Grenze ist dagegen Wasserstoff im Überschuß, so daß die Sauerstoffkonzentration für die Energielieferung ausschlaggebend ist. Dafür gilt aber $c \sim 2Q_{H_2O}$; denn man erhält pro Mol Sauerstoff zwei Mole Wasser. Andererseits ist mit x_i als Molenbruch der Komponente "i" $x_{H_2} + x_{O_2} + x_J = 1$, und da für die gezeichneten Geraden jeweils der Molenbruch des Inertgases x_J konstant ist, gilt $x_{H_2} + x_{O_2} = \text{const.}$ Das bedeutet aber, daß die Wasserstoffkonzentration der Sauerstoffkonzentration direkt proportional ist. - Längs der Grenzkurven ändert sich nun die H_2- bzw. O_2-Grenzkonzentration und damit die verfügbare Wärmemenge. Dabei ändert sich an der oberen Grenze die O_2-Grenzkonzentration nur halb so stark wie die H_2-Grenzkonzentration an der unteren Grenze. Auf Grund der angeführten Zusammenhänge bedeutet das aber, daß sich die verfügbare Wärmemenge an beiden Grenzen bei einer Änderung des Rohrdurchmessers um den gleichen Betrag ändert. Dieser Zusammenhang mit der Verfügbaren Wärmemenge legt die Vermutung nahe, daß die Detonationsgrenzen durch die verfügbare Wärmemenge mitbestimmt werden.

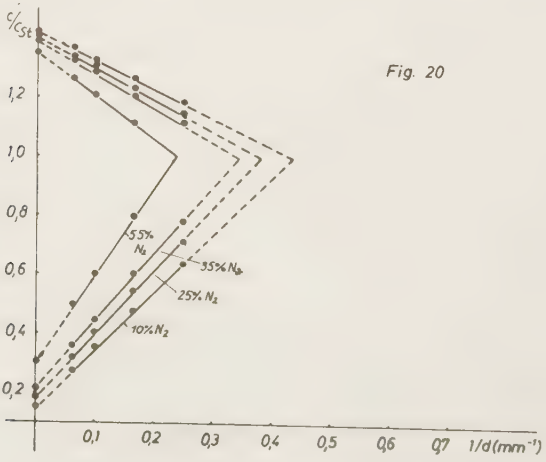


Fig. 20

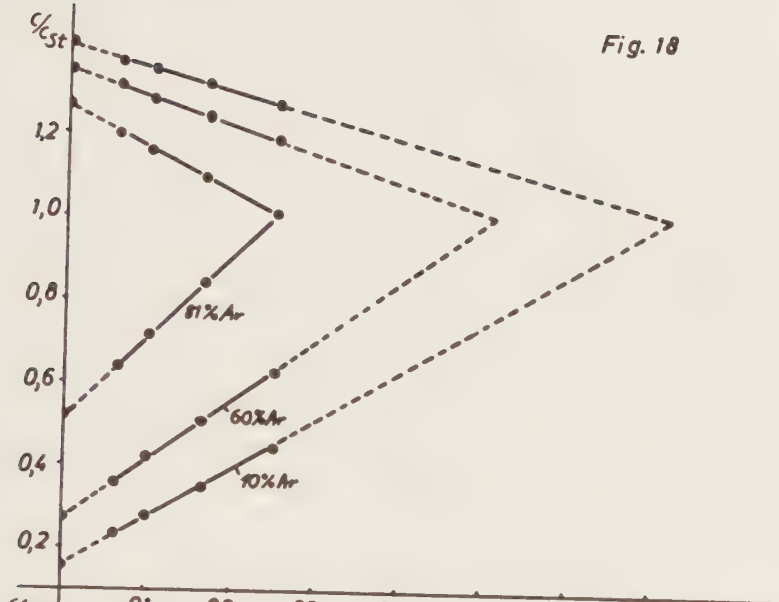

%/cSt
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
81% Ar
60% Ar
10% Ar
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
1/d(mm⁻¹)

Fig. 18

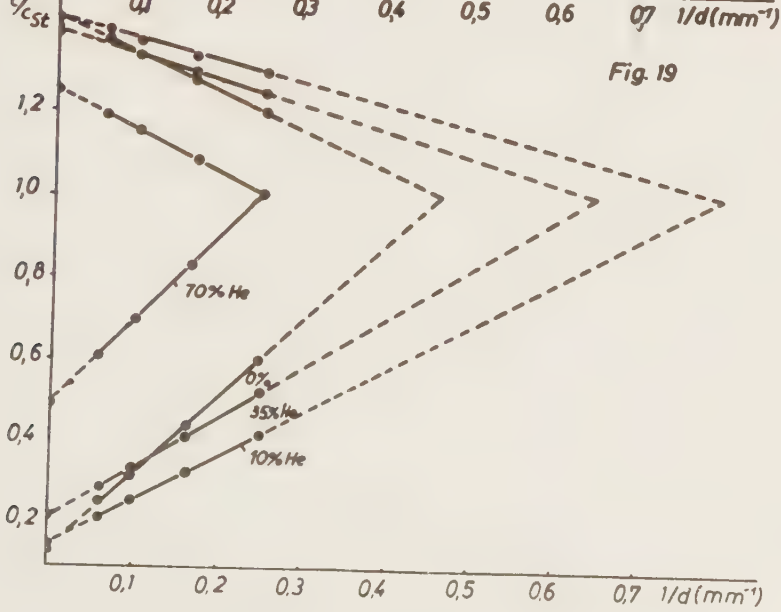

%/cSt
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
70% He
0%
35% He
10% He
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
1/d(mm⁻¹)

Fig. 19

Zur weiteren Auswertung der Meßergebnisse sollen zunächst die Zustandsgrößen am Chapman-Jouguet-Punkt und der Druck und die Temperatur hinter der Stoßfront der entsprechenden Detonation längs einiger Grenzkurven berechnet werden, und zwar wieder unter der Voraussetzung, daß die Stoßfront eben ist. Einige Ergebnisse gibt Tabelle III wieder. Die Berechnungen wurden an den Dreikomponentensystemen für jeweils konstanten Rohrdurchmesser ausgeführt. Aus der Tabelle geht u.a. Hervor, daß die Temperatur hinter der Stoßfront und am Chapman-Jouguet-Punkt bei konstantem Rohrdurchmesser für die verschiedenen Systeme einen unterschiedlichen Gang aufweist. So ändert sich z.B. im System H_2-O_2-He an der unteren Grenze für das 4-mm-Rohr die Temperatur um ungefähr 500° von 1500°K auf 2000°K hinter der Stoßfront und von 2650°K auf 3150°K am Chapman-Jouguet-Punkt. An der unteren Grenze für das 16-mm-Rohr im System H_2-O_2-N_2 bleibt sie dagegen praktisch konstant.

Betrachtet man andererseits die Machzahl der Detonation längs einer Grenzkurve für konstanten Rohrdurchmesser, so fällt auf, daß sie nahezu konstant ist. Die Schwankungen um einen Mittelwert liegen in der Größenordnung von 5%. Neben der Machzahl bleiben der Druck hinter der Stoßfront und am Chapman-Jouguet-Punkt und die Größe γM^2 ziemlich konstant (γ = Verhältnis der spezifischen Wärmen).

Im Zusammenhang mit den experimentellen Ergebnissen sei noch darauf hingewiesen, daß in der Nähe der Detonationsgrenzen immer die dem betreffenden Rohrdurchmesser entsprechende Grundfrequenz des Spins ($\nu = 1{,}84\, c/\pi \cdot d$) auftritt (Spinwellenlänge ungefähr gleich dem dreifachen Rohrdurchmesser). Diese Beobachtung steht im Einklang mit Messungen, die an H_2-CO-O_2-Detonationen ausgeführt (68) wurden. Dabei ergab sich bei gegebenem Rohrdurchmesser ein Übergang vom Spin höherer Frequenz (mehrere Spinwellen) zum Spin niederer Frequenz, wenn die H_2-Konzentration in Richtung auf die Detonationsgrenzen hin geändert wurde. Die Bereiche verschiedener Spinfrequenzen überschnitten sich dabei etwas. In der Nähe der Grenzen wurde dabei immer die Grundfrequenz des Spins beobachtet.

T a b e l l e III

Nr	Gemisch c_{H_2} (Vol%) c_{Inert}		d (mm)	D (km/sec)	M_D	γ	γM_D^2	T_{Ch-J} (°K)
1	40	0	4	2,038	4,875	1,4009	33,3	3149
2	27	5,41% He	4	1,859	4,695	1,4066	31,0	2785
3	22	22,00% "	4	1,976	4,579	1,4364	30,0	2650
4	21	51,00% "	4	2,704	4,722	1,5018	33,5	2872
5	20	60,00% "	4	3,728	4,824	1,5523	36,1	3022
6	66	22,00% "	4	3,686	4,789	1,4369	33,0	2899
7	81	6,00% "	4	3,652	4,777	1,4133	32,3	2879
8	80	0	4	3,363	5,088	1,4029	36,3	3392
9	13,3	24,40% He	16	1,658	4,022	1,4402	23,3	2000
10	17	0	16	1,505	4,182	1,3966	24,4	2141
11	16	25,00% N_2	16	1,505	4,124	1,3976	23,8	2076
12	14,9	56,00% N_2	16	1,508	4,060	1,3990	23,1	2010
13	9	72,00% N_2	16	1,240	3,412	1,3991	16,3	1414
14	14	79,00% N_2	16	1,505	4,000	1,4000	22,4	1941
15	91	0	16	3,846	4,462	1,4040	27,9	2436
16	7	89,50% Ar	16	1,266	3,825	1,6234	23,8	1907
17	9	0		1,150	3,335	1,3958	15,5	1306
18	8,5	25,00% Ar		1,155	3,416	1,4408	16,8	1449
19	7	65,00% Ar		1,184	3,578	1,5385	19,7	1633
20	6	91,00% Ar		1,191	3,614	1,6293	21,3	1712
21	56	40,00% Ar		1,614	3,602	1,4798	19,2	1614
22	65,3	0		3,626	3,590	1,4044	18,1	1555
23	76	19,00% N_2		2,343	3,641	1,4034	18,6	1600

Zeichen: d = Rohrdurchmesser; D = Detonationsgeschwindigkeit; M_d = Machzahl; T_{Ch-J} = Temperatur im verbrannten Gas (Chapman-Jouguet-Punkt); T_{St} = Temperatur hinter der Stoßfront der entsprechenden Detonation; p_{Ch-J} = Druck am Chapman-Jouguet-Punkt; p_{St} = Druck hinter der Detonationsfront; γ = Verhältnis der spezifischen Wärmen.

Tabelle III (Fortsetzung)

Nr	T_{St} °K	p_{Ch-J} (at)	p_{St} (at)	Nr	T_{St} °K	p_{Ch-J} (at)	p_{St} (at)
1	1537	15,9	28,2	13	929	7,5	13,6
2	1464	14,7	26,2	14	1162	10,3	18,9
3	1496	14,1	25,1	15	1403	12,7	23,4
4	1790	15,2	27,1	16	-	-	-
5	2045	15,8	28,5	17	880	7,2	13,0
6	1667	15,3	27,2	18	978	7,6	13,9
7	1580	15,2	26,9	19	1220	8,4	15,6
8	1698	16,7	30,7	20	1418	8,6	16,0
9	1235	10,5	19,4	21	1155	8,4	15,5
10	1203	11,3	20,7	22	1022	8,2	11,8
11	1190	10,9	20,1	23	-	-	-
12	1188	10,7	19,4				

II 3a Zusammenfassung der experimentellen Ergebnisse

Die Messungen ergaben eine Abhängigkeit der Detonationsgrenzen vom Rohrdurchmesser, währedn ein meßbarer Einfluß des Rohrdurchmessers auf die Detonationsgeschwindigkeit auch in unmittelbarer Nähe der Grenzen nicht festgestellt werden konnte. - Für große Rohrdurchmesser können die Detonationsgrenzen auf rein kinetische Einflüsse zurückgeführt werden. Dagegen kann unter den Annahmen, daß die Stoßfront eben und die Temperatur hinter der Stoßfront für kinetische Vorgänge entscheidend ist, kein unmittelbarer Zusammenhang der Detonationsgrenzen mit der Kinetik des Systems hergestellt werden. Auch der unterschiedliche Einfluß der Edelgase Argon und Helium auf die Detonationsgrenzen bei größerem Inertgasgehalt scheint rein kinetische Ursachen für die Grenzen auszuschließen. - Auf der anderen Seite deutet die Tatsache, daß die Machzahl längs einer Grenze für konstanten Rohrdurchmesser nahezu gleich ist, darauf hin, daß hydrodynamische Faktoren für die Existenz der Detonationsgrenzen mindestens mitverantwortlich sind. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage nach der Ursache des Spins und seiner Bedeutung für die Grenzen. Zur Klärung dieser Fragen muß allerdings erst die eingangs formulierte Randwertaufgabe untersucht werden. Erst dann können die Meßergebnisse ausführlich diskutiert und theoretisch begründet werden.

1 Die Grundgleichungen der Hydrodynamik

Die Grundgleichungen der Hydrodynamik (69, 70, 71, 72) sind die Kontinuitätsgleichung (I) und die Eulersche Bewegungsgleichung (II), Newton'sche Gleichung,

$$\text{I} \qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} w = 0$$

$$\text{II,1} \qquad \frac{dw}{dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0$$

Darin sind $\rho = \rho(x,y,z,t)$ die Dichte, $p = p(x,y,z,t)$ der Druck, $w = w(x,y,z,t)$ der Vektor der Strömungsgeschwindigkeit mit den Komponenten u, v, w in kartesischen Koordinaten. "$\frac{d}{dt}$" ist die substantielle Ableitung nach der Zeit, während "$\frac{\partial}{\partial t}$" die partielle Ableitung bezeichnet. Für eine beliebige Funktion $f=f(x,y,z,t)$ mit $x = x(t)$, $y = y(t)$ und $z = z(t)$ gilt:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + w \operatorname{grad} f$$

($w \operatorname{grad} f$ ist das skalare Produkt der Vektoren w und grad f).

Zur vollständigen Beschreibung des Gaszustandes benötigt man noch eine Zustandsgleichung. Man verwendet sie meistens in der Form $p = p(\rho, S)$, S = Entropie. Daraus folgt[1]:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho dS = c^2 d\rho + p_S dS$$

mit $c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$ = Schallgeschwindigkeit. Für isentrope Strömungen (S = konst.) kann man dann mit Hilfe der Beziehung $dp = c^2 d\rho$ "p" in der Gleichung II,1 eliminieren und erhält:

$$\text{II,2} \qquad \frac{dw}{dt} + \frac{c^2}{\rho} \operatorname{grad} \rho = 0$$

c ist darin nur eine Funktion von ρ. Schreibt man die Gleichungen I und II,2 für die einzelnen Komponenten in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z, so erhält man die folgenden vier Gleichungen:

$$1) \quad \rho_t + u\cdot\rho_x + v\cdot\rho_y + w\cdot\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0$$

$$2) \quad u_t + u\cdot u_x + v\cdot u_y + w\cdot u_z + c^2/\rho \cdot \rho_x = 0$$

$$3) \quad v_t + u\cdot v_x + v\cdot v_y + w\cdot v_z + c^2/\rho \cdot \rho_y = 0$$

---

[1] p_s ist die partielle Ableitung von p nach S

4) $w_t + u w_x + v w_y + w w_z + c^2/\rho \cdot \rho_z = 0$

Hierin bedeutet $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ die partielle Ableitung der Funktion f nach x_i ($x_0=t$, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$). Dieses Gleichungssystem läßt sich in Matrix-Schreibweise zu einer Gleichung zusammenfassen:

III $\quad A r_t + B r_x + C r_y + D r_z = 0 \quad$ mit

$$A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ c^2/\rho & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ c^2/\rho & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & \rho \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ c^2/\rho & 0 & 0 & w \end{pmatrix} \qquad r_{x_i} = \begin{pmatrix} \rho_{x_i} \\ u_{x_i} \\ v_{x_i} \\ w_{x_i} \end{pmatrix}$$

Bei den hydrodynamischen Differentialgleichungen handelt es sich um ein System hyperbolischer, quasilinearer partieller Differentialgleichungen. Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichungen muß neben der Differentialgleichung noch vorgegebene Anfangs- und Randbedingungen erfüllen. Im Zusammenhang mit der Lösung der Differentialgleichungen spielen die sog. Charakteristiken eine große Rolle. Charakteristiken[1] sind Flächen, längs denen Unstetigkeiten (Störungen)[2] auftreten können. Die charakteristischen Flächen erhält man als Lösungen einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung, der sog. charakteristischen Gleichung. Für ein System 1. Ordnung lautet diese charakteristische Gleichung in Form einer Determinante:

$$D \left\| \sum_{i=0}^{3} A^i \varphi_{x_i} \right\| = 0 \qquad (\Sigma = \text{Summe})$$

---

[1] Wegen der Definition einer charakteristischen Fläche vgl. z.B. Courant-Hilbert (73), Bd. II, Kap. V, S. 407/8)

[2] Störungen im Sinne der Theorie quasilinearer partieller Differentialgleichungen sind Unstetigkeiten in den Ableitungen der Funktionen. Die Funktionen selbst müssen längs charakteristischer Flächen stetig sein (vgl. Courant-Hilbert, Bd. II, Kap. V, §9 S. 486)

[3] φ_{x_i} sind die Komponenten des Normalenvektors der charakteristischen Fläche im Punkte x,y,z,t. Als Komponenten eines Vektors sind sie in der Gleichung als skalare Größen zu behandeln, d.h. jedes Glied der Matrix A^i ist mit φ_{x_i} zu multiplizieren.

Hierin sind die A^i die oben (S. 34) definierten quadratischen Matrizen und $\varphi_{x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ die partiellen Ableitungen der gesuchten charakteristischen Fläche nach den Koordinaten x_i. "D" bedeutet Determinante der zwischen den Parallelstrichen ($\| \; \|$) stehenden Matrix. Für das obige System partieller Differentialgleichungen (S. 33) erhält man folgende charakteristische Determinante:

$$5) \qquad D \| A\varphi_t + B\varphi_x + C\varphi_y + D\varphi_z \| = 0$$

oder ausgeschrieben:

$$5a) \qquad \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dt} & 0 & 0 & c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 & \frac{d\varphi}{dt} & 0 & c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{d\varphi}{dt} & c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{d\varphi}{dt} \end{vmatrix} \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + w \, \mathrm{grad}\, \varphi \right)$$

Löst man die Determinante auf, so erhält man als endgültige Differentialgleichung für φ:

$$6) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left\{ \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - c^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] \right\} = 0$$

Diese Differentialgleichung zerfällt in zwei Differentialgleichungen, nämlich:

$$6a) \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0 \qquad \text{und} \qquad 6b) \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - c^2 \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} = 0$$

Lösungen dieser partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung sind charakteristische Flächen. Die charakteristischen Hyperflächen $\varphi(x,y,z,t) = 0$ im vierdimensionalen x-y-z-t-Raum oder die Flächen $\psi(x,y,z) = t$ (t als Parameter) im dreidimensionalen x-y-z-Raum, die man erhält, wenn man $\varphi = t - \psi(x,y,z)$ setzt, stellen mögliche Unstetigkeitsflächen oder "Wellenfronten" dar, die mit der Flüssigkeitsbewegung gekoppelt sind. - Ohne Integration dieser Differentialgleichungen kann man nur eine Aussage über die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Flächen oder Wellenfronten im dreidimensionalen x-y-z-Raum machen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Fläche in Richtung der Flächennormalen ist:

$$w_0 = -\frac{\varphi_t}{g} \qquad g = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2$$

(s. Smirnow (74), Bd. IV, S. 355 und S. 419-421)

Die Fläche geht nun in jedem Augenblick durch Flüssigkeitsteilchen hindurch[1]. Ist daher u_n die Geschwindigkeitskomponente eines auf der Fläche befindlichen Flüssigkeitsteilchens in Richtung der zugehörigen Flächennormalen, so erhält man, wenn man beachtet, daß φ_{x_i}/g die Richtungskosinus dieser Normalen sind:

$$u_n = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^{3} v_k \varphi_k$$

v_k sind die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit in Bezug auf ein raumfestes System ($v_1=u$, $v_2=v$, $v_3=w$). Die Differenz $w - u_n$ ergibt die Geschwindigkeit der Fläche gegenüber den Flüssigkeitsteilchen (Relativgeschwindigkeit der Welle). Dafür erhält man:

$$v_r = w - u_n = -\frac{1}{g}\varphi_t - \frac{1}{g}\sum_{k=1}^{3} v_k \varphi_{x_k} = -\frac{1}{g}\frac{d\varphi}{dt}$$

Die beiden Differentialgleichungen 6a und 6b der charakteristischen Flächen ergeben somit $v_r^2 = 0$ und $v_r^2 = c^2$. Der ersten Gleichung entspricht der Fall einer stationären Unstetigkeit, die sich mit der Strömungsgeschwindigkeit bewegt. Wesentlicher ist die zweite Gleichung. Sie ergibt für die Relativgeschwindigkeit der Welle die Schallgeschwindigkeit, d.h. jede Unstetigkeit breitet sich relativ zur Strömung mit der örtlichen Schallgeschwindigkeit aus.

---

1) Es sei die Gleichung der Fläche im dreidimensionalen Raum $\varphi(x,y,z) = t_1$. Konstruiert man in einem Punkt "M" die Flächennormale nach der Seite, auf der $\varphi > 0$ ist und bezeichnet den Schnittpunkt der so orientierten Normalen mit derjenigen Fläche, die zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ gehört, mit M', so ergibt sich aus dem Grenzwert $|MM'|/\Delta t$ für $\Delta t \to 0$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Fläche. Die Richtungskosinus der Normalen in Bezug auf die Koordinatenachsen sind nun $\cos(u,x_i) = \varphi_{x_i}/g$ ($g = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}$). Durch Differentiation der Gleichung $\varphi = 0$ erhält man: $\sum \varphi_{x_i} dx_i + \varphi_t dt = 0$. Die Größen dx_i kann man als Komponenten der in Normalenrichtung erfolgenden infinitesimalen Verschiebung $|MM'|$ auf die Koordinatenachsen auffassen. Daher gilt $dx_i = |MM'|\cos(u,x_i)$. Damit folgt:

$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_{x_i} |MM'| \cos(u,x_i) + \varphi_t dt$$

oder mit $\cos(u,x_i) = \varphi_{x_i}/g$:

$$w = \frac{|MM'|}{\Delta t} = -\frac{\varphi_t}{g}$$

Mit Hilfe der kinematischen und dynamischen Kompatibilitätsbedingungen (74; Bd. IV, S. 419)[1] kann man noch zeigen, daß der Unstetigkeitsvektor für die Ableitungen der Geschwindigkeit gerade die Richtung der Normalen der Unstetigkeitsfläche besitzt (Longitudinalwelle).

I 2 Instationäre eindimensionale Strömung

Im Fall der eindimensionalen zeitabhängigen Strömung vereinfacht sich das Gleichungssystem von Seite 33/34 zu

1) $\varrho_t + u\varrho_x + \varrho u_x = 0$ (Kontinuitätsgleichung)

2) $u_t + uu_x + c^2/\varrho \cdot \varrho_x = 0$ (Eulersche Gleichung)

Die Gleichung 6b von Seite 35 für die charakteristischen Flächen reduziert sich auf

3) $$\varphi_t + (u \pm c)\varphi_x = 0$$

Für die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung sind die sog. Bicharakteristiken[2] (73) wesentlich. Die charakteristischen Flächen lassen sich nämlich aus Bicharakteristiken aufbauen. - Als Kurven, längs denen Unstetigkeiten auftreten können, haben sie für die Differentialgleichung der charakteristischen Flächen die gleiche Bedeutung, wie diese charakteristischen Flächen für das Differentialgleichungssystem. Darüber hinaus sind sie von grundlegender Bedeutung für das Differentialgleichungssystem selbst, und zwar einmal als Kurven, längs denen sich Störungen ausbreiten, andererseits als Kurven, längs denen das Dgl.-System zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung wird. D.h. längs einer Bicharakteristik stellt das Dgl.-System eine innere Ableitung dar (Definition einer Charakteristik).

---

[1] Die kinematischen Kompatibilitätsbedingungen besagen, daß der Sprung einer jeden Ableitung 1.Ordnung der Funktionen der partiellen Ableitung der Flächengleichung $f(x,y,z,t)=0$ nach der entsprechenden Veränderlichen proportional sein muß; also $[\psi_{x_k}] = \psi_{x_k}^+ - \psi_{x_k}^- = h\psi_{x_k}$; $\psi_{x_k}^+$ = Grenzwert von ψ_{x_k} auf der einen Seite der Fläche, $\psi_{x_k}^-$ = Grenzwert auf der anderen Seite.

[2] Die Lösung einer partiellen Dgl. 1.Ordnung läßt sich auf die Lösung eines ihr äquivalenten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (charakteristisches System) zurückführen. Aus diesem gewinnt man zunächst sog. charakteristische Streifen (Charakteristiken), aus denen sich dann bei →

Für die Gleichung 3) werden die Bicharakteristiken gegeben durch die Differentialgleichung:

4) $$\frac{dx}{dt} = u \pm c,$$

d.h.: Es existieren zwei Kurvenscharen im x-t-Diagramm, und längs dieser Kurven breiten sich Störungen aus, und zwar relativ zur Strömung mit Schallgeschwindigkeit. Zur Integration der Gleichung 4), ebenso wie der Gleichung 3), benötigt man die Lösung des Differentialgleichungssystems $u(x,t)$ und $c(x,t)$. Ohne Kenntnis der Lösung kann man im allgemeinen weder die charakteristischen Flächen noch die Bicharakteristiken bestimmen. Eine Ausnahme davon bildet der im Abschnitt III,2b angeführte Fall der Elementarwelle.

III 2a Zur Integration der hydrodynamischen Differentialgleichungen der eindimensionalen zeitabhängigen Strömung

Die Gleichungen 1 und 2 sind linear und homogen in den Differentialen von x und t; x und t selbst kommen nicht vor. Dagegen enthalten die Gleichungen ϱ und u und ihre Differentiale in nichtlinearer Form. Es ist daher zweckmäßig, die Rolle der abhängigen und unabhängigen Variablen zu vertauschen, wie dies Riemann (8) in seiner Arbeit "Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen" getan hat. Dazu setzt man:

$$x = x(\varrho,u), \quad t = t(\varrho,u).$$

Nach einigen Zwischenrechnungen erhält man daraus:

$$u_x = \frac{t_\varrho}{\Delta}, \quad u_t = -\frac{x_\varrho}{\Delta}, \quad \varrho_x = -\frac{t_u}{\Delta}, \quad \varrho_t = \frac{x_u}{\Delta}$$

mit der Funktionaldeterminante Δ : $\Delta = \begin{vmatrix} x_u & t_u \\ x_\varrho & t_\varrho \end{vmatrix}$

Setzt man diese Werte in die Differentialgleichungen 1) und 2) ein, so ergibt sich:

5) $x_u - u t_u + \varrho \cdot t_\varrho = 0$ 6) $x_\varrho - u t_\varrho + \frac{c^2}{\varrho} \cdot t_u = 0$

---

vorgegebenen Anfangswerten die Lösung aufbauen läßt. Längs der Charakteristiken können Unstetigkeiten in den Ableitungen der Funktion auftreten.

Die Gleichung 6 läßt sich umschreiben in:

6a) $$\frac{\partial}{\partial \rho}(x-ut) = \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial u}$$

Darin ist $V = V(\rho,u)$ eine neue abhängige Variable, die mit "x" und "t" folgendermaßen zusammenhängt:

7) $$x - ut = V_u, \quad t = -\frac{\rho}{c^2}V$$

Die Gleichung 6 ist dann erfüllt. Mit den Werten $x_u - ut_u$ und t_ρ, die sich aus 7 ergeben, geht man in die Gleichung 5) ein und erhält:

8) $$V_{uu} - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\rho^2}{c^2}V_\rho\right) = 0$$

Das ist eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung der eizigen Unbekannten $V(\rho,u)$. Man kann die Gleichung noch vereinfachen, in dem man statt ρ die neue Variable $\xi = \int \frac{c}{\rho} d\rho$ $(d\xi = (c/\rho)d\rho)$ einführt. Außerdem soll für u die Bezeichnung η eingeführt werden. Damit erhält man:

$$\frac{\rho^2}{c^2}V_\rho = \frac{\rho^2}{c^2}V_\xi \frac{d\xi}{d\rho} = \frac{\rho}{c}V_\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\rho^2}{c^2}V_\rho\right) = \frac{c}{\rho}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\rho}{c}V_\xi\right) = V_{\xi\xi} + \frac{c}{\rho}V_\xi \frac{d}{d\xi}\frac{\rho}{c} = V_{\xi\xi} + V_\xi \frac{d}{d\rho}\frac{\rho}{c}$$

Führt man hier die polytrope Abhängigkeit zwischen p und ρ ein, also

$$p = a\rho^n, \quad \frac{dp}{d\rho} = c^2 = na\rho^{n-1}, \quad \frac{c}{\rho} = \sqrt{na}\,\rho^{\frac{n-3}{2}}$$

so wird:

9) $$\xi = \frac{2\sqrt{na}}{n-1}\rho^{\frac{n-1}{2}}, \quad \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho}{c}\right) = \frac{3-n}{n-1}\cdot\frac{1}{\xi}$$

(n = Polytropenexponent)

Statt 8 erhält man somit:

10) $$V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} + \frac{k}{\xi}V_\xi = 0$$

mit $k = \frac{3-n}{n-1}$

Für k = 0 reduziert sich diese Gleichung auf die Gleichung der Schwingenden Saite und man erhält für V die D'Alembertsche Lösung:

11) $$V = V_o = F(\xi + \eta) + G(\xi - \eta)$$

wobei F unf G bis auf die nötigen Stetigkeitseigenschaften willkürliche Funktionen sind. Weiter kann man zeigen: Ist "W" eine Lösung der Differentialgleichung[1)]

12) $$W_{\xi\xi} - W_{\eta\eta} + (\ell/\xi) W_\xi = 0$$

so ist $V = \frac{1}{\xi} \frac{\partial W}{\partial \xi}$ eine Lösung der folgenden Dgl.:

13) $$V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} + (\ell+2/\xi) V_\xi = 0$$

Daraus folgt: Kennt man die Lösungen für k = 0, so sind die Lösungen für k = 2, 4, 6,.... oder allgemein für k = 2h bekannt. Der zugehörige Polytropenexponent ist:

14) $$n = \ell + \frac{2}{2h + \ell}$$

Für Werte von $k \neq 2h$ ist die Lösung dagegen nicht so einfach zu erhalten, sondern nur in Form eines komplexen Integrals darzustellen[2)]. Der aufgezeigte Lösungsweg kann aber nur eingeschlagen werden, wenn die Funktionaldeterminante Δ nicht null ist. Andererseits ist der Fall, in dem $\Delta = 0$ ist, für die Lösung von Strömungsproblemen sehr wichtig, so daß im nächsten Abschnitt darüber berichtet werden soll.

III 2b Elementarwelle

Zunächst noch einiges über die Gleichungen 4) der Bicharakteristiken von Seite 38. Für eine feste Lösung u(x,t), ϱ(x,t) stellen die Gleichungen zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für x = x(t) dar, d.h. die Integration dieser Gleichungen liefert zwei einparametrige Familien charakteristischer Kurven oder einfach Charakteristiken C_+ und C_- in der x-t-Ebene. Man kann diese beiden Kurvenscharen in der Form $\beta(x,t) = \text{konst}$ und $\alpha(x,t) = \text{konst}$ darstellen. Diese bilden dann ein krummliniges Koordinaten-

---

1) Courant-Hilbert Bd. II

2) Eine ausführliche Diskussion der Lösungen der Dgl. gibt Bechert (76,77,78). Vgl. auch Sommerfeld (79) Bd. 2,S.257

system. Es ist nun zweckmäßig, anstelle von x und y diese neuen Parameter α und β einzuführen, so daß β längs der Kurven C_+ konstant ist und α längs der Kurven C_-. Die Gleichung 4 erhält somit die Form:

15a) $x_\alpha = (u + c)\, t_\alpha$ und 15b) $x_\beta = (u - c)\, t_\beta$

Wie transformieren sich nun die Gleichungen 1 und 2 von Seite 37 auf die neuen KOOrdinaten? - Man gelangt am einfachsten zum Ziel[1], wenn man die Gleichung 1 mit c multipliziert und dann entweder zu 2 addiert oder von 2 subtrahiert. Man erhält so folgende Gleichungen:

16a) $$\rho_t + (u + c)\rho_x + \rho/c\{u_t + (u + c)u_x\} = 0$$

16b) $$\rho_t + (u - c)\rho_x - \rho/c\{u_t + (u - c)u_x\} = 0$$

Verwendet man die Gleichungen 15, so sieht man, daß die Gleichungen 16 Ableitungen der Funktionen ρ und u längs der Charakteristiken darstellen, also in bezug auf die Koorinaten α und β folgende Form annehmen:

17a) $u_\alpha + \frac{c}{\rho}\rho_\alpha = 0$ 17b) $u_\beta - \frac{c}{\rho}\rho_\beta = 0$

Diese Gleichungen können nun unter der Annahme $c = c(\rho)$ integriert werden und ergeben:

18a) $$u + \ell(\rho) = 2r(\beta)$$

18b) $$u - \ell(\rho) = -2\, s(\alpha)$$

Darin kann man $r(\beta)$ und $s(\alpha)$, die sog. Riemann-Invarianten, als beliebige Funktionen von α und β betrachten. $\ell(\rho)$ ist gleich:

$$\ell(\rho) = \int_{\rho'}^{\rho} \frac{c}{\rho}\, d\rho - \int_{\rho'}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho c}$$

Diese Gleichungen stellen ebenfalls eine Schar charakteristischer Kurven Γ_+ und Γ_- dar, die Bildkurven der Charakteristiken C_+ und C_- in der (ρ,u)-Ebene. Sie bringen außerdem zum Ausdruck, daß diese Bildkurven nicht an die Wahl einer speziellen Lösung (u,ρ) gebunden sind, d.h. sie sind von der speziellen Lösung unabhängig. Das ist gleichbedeutend mit der Tatsache, daß diese Dgl. reduzierbar sind.

[1] Courant-Friedrichs (80), Kap. II, S. 42 - 43

Im Falle der Polytropen-Gleichung $c = \sqrt{a n \rho^{(n-1)/2}}$ (a = Konstante) erhält man:

19) $$\ell(\rho) = \frac{2}{n-1}\sqrt{a n \rho^{\frac{n-1}{2}}}$$

wenn man $\rho' = 0$ setzt; oder einfach $\ell(\rho) = (2/n-1)\,c$. Die Riemann-Invarianten gehen damit über in:

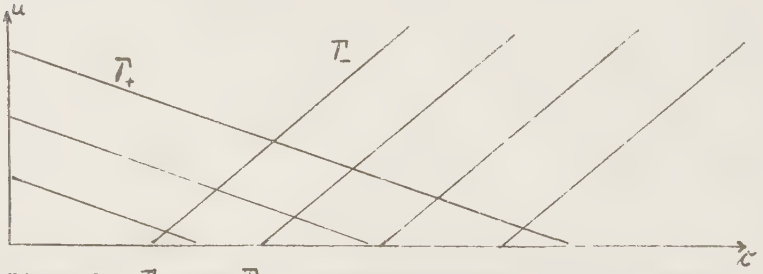
20a) $r = \frac{u}{2} + \frac{c}{n-1}$ 20b) $-s = \frac{u}{2} - \frac{c}{n-1}$

Damit ergeben sich folgende grundlegende Gleichungen:

21a) $\frac{dx}{dt} = u + c$ 21b) $\frac{u}{2} + \frac{c}{n-1} = \text{konst}$ längs C_+

22a) $\frac{dx}{dt} = u - c$ 22b) $\frac{u}{2} - \frac{c}{n-1} = \text{konst}$ längs C_-

Die Charakteristiken Γ_+ und Γ_- sind bestimmte Kurven in der ρ-u-Ebene. Betrachtet man an Stelle von ρ und u, u und c als abhängige Variable, so sieht man, daß die Γ-Charakteristiken in der u-c-Ebene Geraden sind (Fig. 21).



Figur 21: Γ_+- und Γ_--Charakteristiken in der u-c-Ebene

Ist nun weder $r(\beta)$ noch $s(\alpha)$ in einem Gebiet konstant, so besteht eine eindeutige Zuordnung zwischen den Charakteristiken C_+ und Γ_+ einerseits und C_- und Γ_- andererseits, d.h. es besteht eine eineindeutige Zuordnung zwischen der x-t-Ebene und der u-ρ-Ebene. Ist dagegen eine der beiden Riemann-Invarianten in einem Gebiet konstant, so wird u eine Funktion von ρ oder umgekehrt ($u = f(\rho)$), was gleichbedeutend mit dem Verschwinden der Funktionaldeterminante ist. In diesem Fall wird die Lösung der Differentialgleichung als "Elementarwelle" (Simple Wave)[1] bezeichnet. Sie spielen eine grundlegende Rolle bei der Lösung hydrodynamischer Probleme.

1) s.Fußnote 1 S. 43

Man kann nun zeigen, daß die Strömung, die sich an ein Gebiet konstanten Zustandes anschließt, immer eine Elementarwelle ist[1]. In einem Gebiet konstanten Zustandes sind die Charakteristiken C_+ und C_- Geraden (u und c sind konstant). In dem anschließenden Gebiet der Wellenzone sind dann jeweils die Charakteristiken einer Schar (C_+ oder C_-) Geraden. Man entnimmt das aus der Bedingung, daß eine der beiden Riemann-Invarianten konstant sein soll (z.B. $s(\alpha)$). Das bedeutet nämlich, daß das Gebiet der Wellenzone (x-t-Ebene) auf eine einzige Γ-Charakteristik abgebildet wird (z.B. Γ_-). Diese Γ-Charakteristik ist aber die Bildkurve der einen C-Charakteristikenschar. Die Bildkurven der anderen C-Charakteristikenschar müssen nun aber jeweils einen Punkt mit der Γ-Charakteristik gemeinsam haben, und zwar ist das der Schnittpunkt der beiden Bildkurven. Da nun die ganze Wellenzone auf die eine Γ-Charakteristik abgebildet wird, bedeutet das, daß die zweite Schar der Bildkurven in jeweils einen Punkt, den Schnittpunkt, entartet. Daraus folgt aber, daß u und c längs der zugehörigen C-Charakteristiken konstant sind, diese also Geraden in der x-t-Ebene darstellen.

Wendet man diese Ergebnisse auf die Differentialgleichungen der eindimensionalen Strömung an, so findet man die folgenden Zusammenhänge für eine Elementarwelle. Da in der Wellenzone eine Schar der Charakteristiken C_+ oder C_- Geraden in der x-t-Ebene sind, stellen diese Charakteristiken die Ausbreitung eines Zustandes mit konstanter Geschwindigkeit dar. Ist z.B. die eine Riemann-Invariante $-2s = u - \ell(\rho)$ in der Wellenzone konstant, so sind die C_+-Charakteristiken, r = konst, Geraden. Die Geschwindigkeit der entsprechenden Welle, $u + c$, ist größer als die Teilchengeschwindigkeit u, d.h. der Teilchenweg (Stromlinie) überschreitet jede C_+-Charakteristik von rechts, kommt also von der Seite größerer x-Werte (Fig. 22). Diese Wellen nennt man vorwärtslaufend. Ist dagegen $2r = u + \ell(\rho)$ im Wellengebiet konstant, so sind die C_--Charakteristiken Geraden und die Welle wird als rückwärtslaufend bezeichnet (Fig. 23). Der Übergang von der angrenzenden Strömung kon-

[1] Courant-Friedrichs, Kap. II, S. 60 - 61

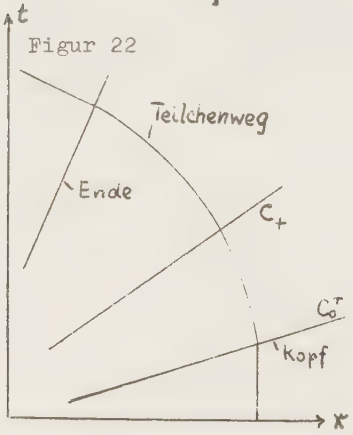
stanten Zustandes in das Gebiet der Wellenzone findet ebenfalls über eine C-Charakteristik statt. - Es soll nun zunächst eine vorwärtslaufende Welle betrachtet werden. Der Übergang in die Wellenzone erfolgt dann über eine C_+-Charakteristik, den Kopf der Welle, wenn das Gas in die Wellenzone eintritt oder das Wellenende, wenn das Gas in die Wellenzone verläßt. Sind u_o und ρ_o die Geschwindigkeit und die Dichte in dem Gebiet konstanter Strömung, dann gilt im Gebiet der Wellenzone:

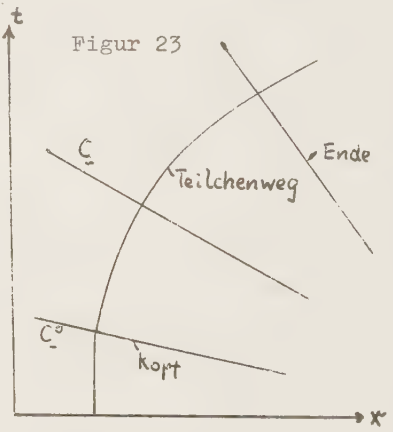
23) $$u - \ell = u_o - \ell_o, \quad \ell_o = \ell(\rho_o)$$

Ist im Anfangszustand $u_o = o$, so gilt speziell:

24) $$u - \ell = - \ell_o$$

Da nun $\frac{d\ell}{d\rho} > 0$ und $\frac{d\rho}{d\rho} > 0$, so folgt, daß sich die Dichte und





Figur 22: Vorwärtslaufende Verdünnungswelle
Figur 23: Rückwärtslaufende Verdünnungswelle

der Druck im selben Sinne wie die Strömungsgeschwindigkeit ändern, wenn es sich um eine vorwärtslaufende Welle handelt. - Dagegen ändern sich Druck und Dichte im entgegengesetzten Sinn bei einer rückwärtslaufenden Welle. - Man nennt eine Welle "Verdünnungswelle", wenn sich Druck und Dichte beim Durchlaufen der Welle erniedrigen; nehmen Druck und Dichte zu, so bezeichnet man die Welle als Kompressionswelle.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ der Wellen, die durch die geraden Charakteristiken C_+ gegeben wird, ist nach den Gleichungen 21a) von Seite 42 und 23) von Seite 44:

$$\frac{dx}{dt} = c(\rho) + \ell(\rho) - \ell_o + u_o$$

Die Änderung dieser Geschwindigkeit in Bezug auf die Gasgeschwindigkeit $u = \ell(\rho) - \ell_o + u_o$ ist, wie man zeigen kann

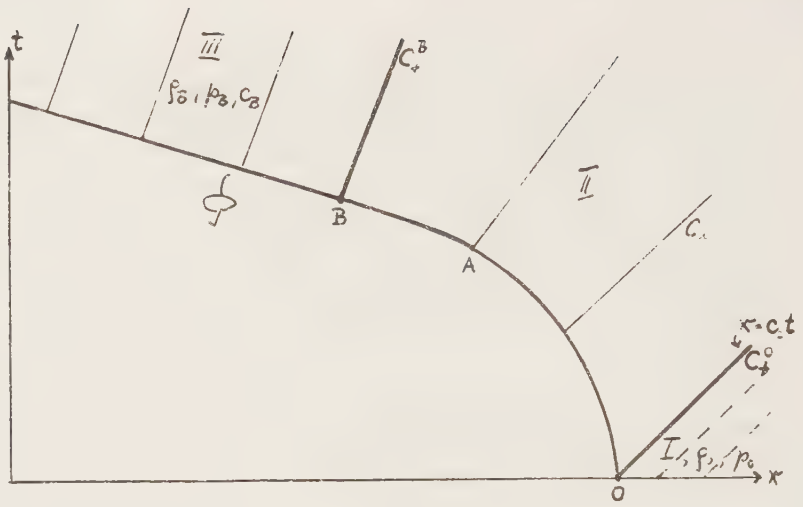
$\frac{d(u+c)}{du} > 0$ für eine vorwärtslaufende Welle[1] und ebenso

$\frac{d(u-c)}{du} > 0$ für eine rückwärtslaufende Welle. Daraus folgt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elementarwellen in einer Wellenzone zunimmt, wenn die Gasgeschwindigkeit zunimmt.

Verdünnungswelle

Im folgenden soll die Strömung betrachtet werden, die ein Kolben verursacht, der in einem Gas bewegt wird, das ursprünglich ruht. Dabei soll sich das Gas in einem Rohr befinden und der Kolben das Rohr an einer Seite verschließen. Die Kolbenbewegung überträgt sich nicht plötzlich auf alle Teile des Gases, sondern nur auf die nächstliegenden Gasteilchen. Es wird daher zur Ausbildung einer Welle kommen, die sich vom Kolben weg in das Gas hinein ausbreitet. Dabei wird nur der Ruhezustand derjenigen Gasteilchen geändert, die von der Kopfwelle erfaßt worden sind. Stellt die Welle eine kontinuierliche Bewegung dar, so bewegt sich die Wellenfront mit der Schallgeschwindigkeit c_o in das ruhende Gas. Bewegt man den Kolben in Richtung der negativen x-Achse mit wachsender Geschwindigkeit bis zum Erreichen einer konstanten Geschwindigkeit $u_B < 0$, so wird der Kolbenweg K in der x-t-Ebene durch eine Kurve wiedergegeben, die vom Nullpunkt "O" mit wachsender negativer Steigung ausgeht, bis sie die konstante Neigung $-u_B > 0$ erreicht hat. Dann geht die Kurve in eine Gerade über (Fig. 24). - Die durch die Kolbenbewegung verursachte Störung pflanzt sich in das ruhende Gas hinein fort (in Richtung der positiven x-Achse), und zwar mit der Schallgeschwindigkeit c_o, die dem Zustand (ρ_o, p_o) des Gases entspricht. Das folgt aus der Tatsache, daß der Zustand im Gebiet mit

[1] Courant-Friedrichs, Kap. III, S. 94



Figur 24: Gebiet einer Verdünnungswelle

$x \geqslant c_0 t$ durch den Zustand längs der positiven x-Achse ($x>0$) bestimmt wird. Da nun für $x \geqslant c_0 t$ der Ruhezustand (p_0, ρ_0) längs der positiven x-Achse herrscht, so ergibt sich als einzig mögliche Lösung der Differentialgleichungen der konstante Zustand. (Das hängt mit der Bedeutung der Charakteristiken C_+ und C_- für die Bestimmung des Einflußgebietes einer Störung zusammen). - Die durch den Kolben beeinflußte Strömung wird so auf das Gebiet $x \leqslant c_0 t$ beschränkt Da dieses Gebiet aber an ein Gebiet konstanten Zustandes grenzt, ist die Strömung eine Elementarwelle (s.S.43), und zwar eine vorwärtslaufende, da das Gas von rechts in die Wellenzone eintritt. In diesem Gebiet ist daher $u - \ell = -\ell_0$ (s.S. 41) konstant. Längs des Kolbenweges $x = X(t)$ stimmt die Gasgeschwindigkeit mit der Kolbengeschwindigkeit $\dot{x} = \dot{X}(t)$ überein[1], so daß die Dichte ρ und damit die Schallgeschwindigkeit c durch die Gleichung $\ell = \ell_0 + \dot{x}(t)$ bestimmt werden. Die Neigung $u + c$ der Charakteristiken, die Geraden sind, wird genauso bestimmt. Somit ist der Zustand in der Wellenzone festgelegt. - Für das Gebiet der Wellenzone erhält man die der Figur 24 wiedergegebene Darstellung. Man sieht, daß Druck und Dichte in der Wellenzone von rechts nach links abnehmen, da u_p abnimmt, es sich also um eine Verdünnungswelle handelt. Da nun $\frac{dx}{dt} = u + c$, die Wellengeschwindigkeit, sich im selben Sinne ändert wie die Gasgeschwindigkeit u (s.S. 45), also abnimmt, divergieren die geraden Charakteristiken, die längs des Kolbenweges entspringen.

---

[1] $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

Kompressionswelle

Wird der Kolben nicht aus dem Rohr herausgezogen, sondern in das Rohr hineingeschoben, dann entsteht eine einfache Kompressionswelle vor dem Kolben. Die qualitativen Ergebnisse und die Formeln, die für die Verdünnungswelle abgeleitet wurde, gelten ebenso für die Kompressionswelle, mit der Ausnahme, daß jetzt Druck, Dichte und Schallgeschwindigkeit am Kolben zunehmen und daher die C_+-Charakteristiken nicht von der Kurve des Kolbenweges aus divergieren, sondern konvergieren. Aus diesem Grunde existiert die Elementarwelle nicht für alle Zeiten t. Da die geraden C_+-Charakteristiken, längs denen sich jeweils ein anderer Wert von u "ausbreitet", bis ins Unendliche verlängert werden können, werden sie eine Enveloppe bilden, auf der die u-Werte dann in Widerspruch geraten. Zu dem Zeitpunkt $T = t_c$, an dem eine Enveloppe auftritt, wird diese einen Kehrpunkt (Figur 25) an einer Stelle $x = x_c$ bilden. Die beiden Zweige der Enveloppe, die sich in diesem Kehrpunkt treffen, begrenzen ein Gebiet, das von den C_+-Charakteristiken dreifach überdeckt wird. Daher ist eine eindeutige Fortsetzung der Lösung über den Zeitpunkt $t = t_c$ hinaus mathematisch unmöglich[1]. Aus diesen Gründen ist eine stetige Fortsetzung der isentropen und nur von Druckkräften bestimmten Strömung unmöglich. Bemerkenswert ist, daß das Versagen einer vernünftigen Hypothese über die Gesetze der stetigen Strömung aus rein mathematischen Gründen erfolgt. Wie nun die Strömung in diesem Fall fortzusetzen ist und welche neue Hypothese an die Stelle der anderen tritt, soll im folgenden beschrieben werden.

Figur 25: Enveloppenbildung bei einer Kompressionswelle

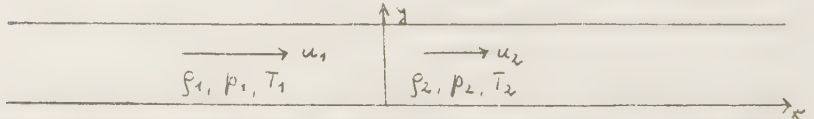
1) Das geschilderte Verhalten der Charakteristiken ist die mathematische Formulierung des Becker'schen Modells.

Stoßfronten

Die obigen Ausführungen haben gezeigt, daß im Falle einer Kompressionswelle nicht für alle Zeiten nach dem Entstehen der Welle eindeutige stetige Lösungen der hydrodynamischen Differentialgleichungen existieren. Um auch in diesem Falle zu einer eindeutigen Lösung zu gelangen, muß man Unstetigkeitsflächen (Stoßfronten) einführen. Beim Überschreiten einer Unstetigkeitsfläche ändern sich die Funktionswerte selbst sprunghaft, d.h. um endliche Beträge. Während nun im Falle linearer partieller Differentialgleichungen Unstetigkeiten in den Funktionen selbst ebenfalls längs charakteristischer Flächen auftreten, sind die Unstetigkeiten bei quasilinearen Differentialgleichungen keine charakteristischen Flächen[1]. Daher werden diese Flächen und ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit auch nicht, wie im Falle charakteristischer Flächen, durch eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung festgelegt, sondern es müssen zu ihrer Bestimmung andere Gleichungen herangezogen werden. Dazu dienen bei den hydrodynamischen Differentialgleichungen die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie. Während nun aber aus der Erhaltung der Energie bei stetigen Strömungen die Erhaltung der spezifischen Entropie für jedes Gasteilchen folgt, ist diese Folgerung beim Auftreten von Unstetigkeiten nicht mehr möglich, da es sich dabei um irreversible Prozesse handelt. Man kann nur noch fordern, daß die Entropie beim Überschreiten der Unstetigkeitsfläche nicht abnehmen darf. Diese sog. "Entropiebedingung" muß zu den Erhaltungssätzen hinzugefügt werden.

Übergangsbedingungen

Handelt es sich um eine stationäre Stoßfront, so kann man ein Koordinatensystem benutzen, in dem die Stoßfront ruht (Fig. 26). Das ursprünglich ruhende Gas strömt dann in die-



Figur 26: Schematische Darstellung der Strömungsverhältnisse bei einer stationären Stoßfront.

[1] Courant-Hilbert Bd. II, S. 488-489

sem Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit u_1 der Stoßfront in Richtung der positiven x-Achse, wenn sich die Stoßfront im ruhenden Bezugssystem (Laborsystem) in Richtung der negativen x-Achse ausbreitet. Die Erhaltungssätze gelten dann in folgender Form:

25) $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = m = konst$ Massenerhaltung

26) $u_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} = u_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2} = konst$ Impulserhaltung

27) $\frac{1}{2} u_1^2 + h_1 = \frac{1}{2} u_2^2 + h_2 = konst$ Energieerhaltung

(h = Enthalpie pro Masseneinheit)

Formt man 26 um in $\frac{1}{\rho_1}(\rho_1 u_1)^2 + p_1 = \frac{1}{\rho_2}(\rho_2 u_2)^2 + p_2$

und setzt 25 ein, so ergibt sich:

28) $m^2 = (\rho_1 u_1)^2 = (\rho_2 u_2)^2 = \frac{p_2 - p_1}{1/\rho_1 - 1/\rho_2}$

Dies ist in einem p-$1/\rho$-Diagramm die Gleichung einer Geraden, der sog. Rayleighgeraden. Die Neigung dieser Geraden wird durch die Geschwindigkeit u_1 der Stoßfront bestimmt, da ρ_1 und p_1 durch den Ausgangszustand des Gases gegeben sind. Formt man Gleichung 27 um in

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\rho_1^2}(\rho_1 u_1)^2 - \frac{1}{\rho_2^2}(\rho_2 u_2)^2\right]$$

und setzt 25 und 28 ein, so folgt:

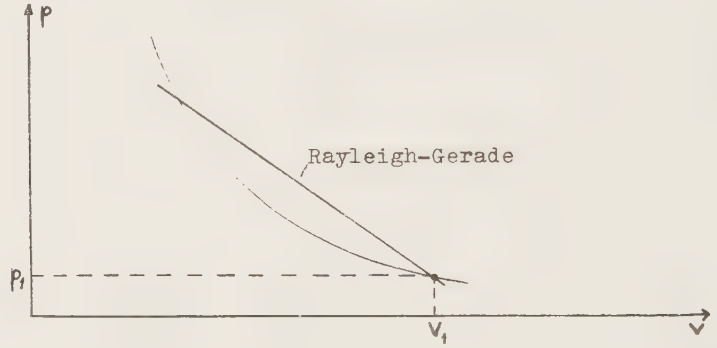
29) $\Delta h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)(p_2 - p_1)$

oder wenn man das spezifische Volumen $v = 1/\rho$ einführt:

29a) $\Delta h = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(p_2 - p_1)$

Dies ist die Rankine-Hugoniot-Gleichung, die Zustandsgleichung für alle Zustände, die von einem Ausgangszustand mit Hilfe einer Stoßwelle erreicht werden können. - Der Zustand hinter einer Stoßfront wird durch den Schnittpunkt der Hugoniot-Kurve mit der Rayleighgeraden im p-v-Diagramm gegeben (s. Fig. 27), der festliegt, wenn die Geschwindigkeit der Stoßfront oder eine der Größen u_2, ρ_2, p_2, T_2 hinter der Stoßfront bekannt ist. - Aus der Figur ergibt sich, daß Druck und Dichte hinter der Stoßfront immer höher sind als vor der Stoßfront. Damit folgt aus Gleichung 25, daß $u_1 > u_2$ ist, und zwar ist u_1 größer als

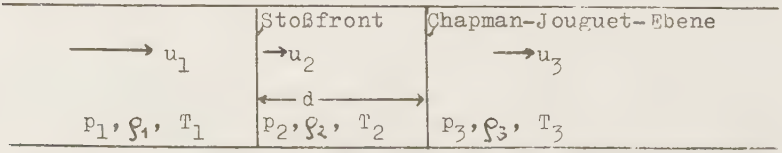
die örtliche Schallgeschwindigkeit[1]. Das bedeutet, daß sich die Stoßfront in bezug auf das Gas (ρ_1, p_1) vor der Front mit Überschallgeschwindigkeit bewegt, in bezug auf das Gas hinter der Front mit Unterschallgeschwindigkeit. Daraus folgt vor allem, daß jede Störung hinter der Stoßfront die Front beeinflußt.



Figur 27: Hugoniot-Kurve und Rayleigh-Gerade im p-v-Diagramm. v_1= Ausgangszustand, v_2= Endzustand

Detonation

Wie auf Seite 1 ausgeführt wurde, breitet sich eine Verbrennung in einem reaktionsfähigen Gasgemisch unter gewissen Umständen mit einer sehr großen Geschwindigkeit aus. Diese Geschwindigkeit läßt sich nach der Theorie von Chapman und Jouguet (6,7) aus den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie bei Kenntnis der thermodynamischen Daten des Anfangs- und Endzustandes berechnen. Für ein mit der Stoßfront mitbewegtes Koordinatensystem (Fig. 28) gel-



Figur 28: Schematische Darstellung der Strömungsverhältnisse bei einer Detonation. Die Detonationfront (Stoßfront) ruht im gewählten Koordinatensystem.

ten wieder die Erhaltungsgleichungen in folgender Form:

30) $\rho_1 u_1 = \rho_3 u_3$ Massenerhaltung

1) Courant-Friedrichs Kap. III, S. 141 ff.

31) $\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_3 u_3^2 + p_3$ Impulserhaltung

32) $\frac{1}{2} u_1^2 + E_1 + p_1/\rho_1 = \frac{1}{2} u_3^2 + E_3 + Q + p_3/\rho_3$ Energieerhaltung

(Q = Reaktionswärme)
Aus 30) und 31) folgt:

33a) $u_1^2 = \frac{1}{\rho_1^2} \frac{p_3 - p_1}{1/\rho_1 - 1/\rho_3}$ 33b) $\frac{\rho_1 u_1^2}{p_1} = \frac{p_3/p_1 - 1}{1 - \rho_1/\rho_3}$

Dies sind Gleichungen einer Geraden im p-v-Diagramm, der schon genannten Rayleighgeraden (S. 49). - Eliminiert man aus den Gleichungen 30) bis 32) die Geschwindigkeit, so erhält man die Hugoniot-Gleichung für das verbrannte Gas:

34) $E_3 - E_1 + Q = \frac{1}{2}(p_1 + p_3)(v_1 - v_3)$ $v_i = 1/\rho_i$

Dies ist die Zustandsgleichung für alle Zustände, die von einem Ausgangszustand (p_1, ρ_1) erreicht werden können, ohne die drei Erhaltungssätze zu verletzen. Für Q = 0 ist es die Zustandsgleichung einer Stoßwelle ohne chemische Reaktion (S. 49, Gl. 29). - Da der Endzustand dadurch nicht eindeutig bestimmt ist, braucht man noch eine zusätzliche Bedingung, um den Verlauf der Rayleighgeraden im p-v-Diagramm festzulegen. Diese zusätzliche Bedingung ist die sog. "Chapman-Jouguet-Bedingung"[1]. Sie besagt: Eine stationäre Detonation breitet sich so aus, daß die Detonationsfront von den verbrannten Gasen (Schwaden) aus gesehen mit der Schallgeschwindigkeit c der Schwaden voraneilt.

35) $D = w + c$ w = Strömungsgeschwindigkeit der Schwaden im ruhenden Bezugssystem

Das bedeutet, daß die Rayleighgerade im p-v-Diagramm Tangente an die Hugoniot-Kurve für das verbrannte Gas ist. Der Berührungspunkt heißt Chapman-Jouguet-Punkt (Ch-J); s. Figur 29, Seite 50. - Gleichzeitig berührt die zugehörige Isentrope die Hugoniotkurve im Ch-J-Punkt. Daher gilt:

36) $\left(\frac{d p_3}{d v_3}\right)_S = - \frac{p_3 - p_1}{v_1 - v_3}$

Verwendet man die Gleichung der Isentropen für das als ideales Gas betrachtete verbrannte Gas, so folgt:

---

[1] Diese Chapman-Jouguet-Bedingung stellt die einzig stabile Lösung eines Randwertproblems dar (Courant-Friedrichs Kap. III, S. 222-224 und 232-235)

37) $$\frac{p_3 - p_1}{v_3 - v_1} = - \gamma_3 \frac{p_3}{v_3}$$

γ_3 = Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Volumen und konstantem Druck

Damit folgt aus den Gleichungen 30) bis 34) (vergl. z.B. Lewis und v. Elbe (67); Combustion and Flames and Explosions of Gases, S. 606):

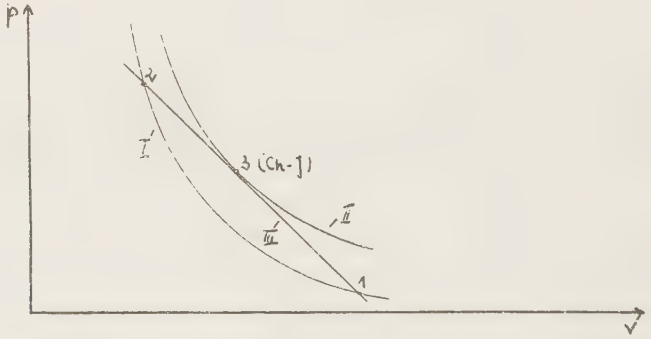
38) $$\frac{v_1^2}{v_3^2} - \left(1 + \gamma_3\right)\frac{v_1}{v_3} + \frac{n_1 T_1}{\gamma_3 n_3 T_3} = 0$$

39) $$\overline{C}_v\left(T_3 - T_1\right) - Q - \frac{R}{\lambda}\left(\frac{v_1}{v_3} - 1\right)\left(n_3 T_3 + n_1 T_1 \cdot \frac{v_3}{v_1}\right) = 0$$

40) $$\frac{p_3}{p_1} = \frac{v_1}{v_3}\,\frac{n_3 T_3}{n_1 T_1}$$

41) $$u_1 = D = \frac{v_1}{v_3}\sqrt{\gamma_3 n_3 R T_3}$$

Die Theorie sagt aber noch nichts über den Übergang in den Zustand 3 aus. Hiefür gilt das auf Seite 3 Gesagte.



Figur 29: Hugoniot-Kurve des unverbrannten (I) und verbrannten (II) Gases und Rayleighgerade (III) für eine stabile Detonation im p-v-Diagramm.

3 Ebene wirbelfreie stationäre und isentrope Strömung

Die Grundgleichungen der zweidimensionalen wirbelfreien stationären und isentropen Strömung sind Gleichungen 1 bis 3 von Seite 33 und die Gleichung, die aus der Bedingung rot $\omega = 0$ folgt. Damit erhält man zunächst folgende vier Gleichungen:

42) $$u\rho_x + v\rho_y + \rho(u_x + v_y) = 0$$ Kontinuitätsgleichung

43) $$uu_x + vu_y + \frac{c^2}{\rho}\rho_x = 0$$

44) $$uv_x + vv_y + \frac{c^2}{\rho}\rho_y = 0$$ Eulersche Gleichungen

45) $$u_y - v_x = 0$$ Wirbelsatz

Aus diesen Gleichungen erhält man nach kurzer Rechnung die folgenden zwei Gleichungen:

$$46) \qquad (c^2 - u^2)\, u_x - uv\,(u_y + v_x) + (c^2 - v^2)\, v_y = 0$$

$$45) \qquad u_y - v_x = 0$$

Darin ist c eine bekannte Funktion von u^2+v^2, die sich aus der Bernoullischen Gleichung $q^2 + 2h = \hat{q}^2 = \text{konst.}$ ergibt. In dieser Gleichung sind "h" die Enthalpie, "$q^2 = u^2+v^2$ " die kinetische Energie und $\hat{q}^2$ die Grenzgeschwindigkeit[1]. Für ein ideales Gas konstanter spezifischer Wärme läßt sich die Gleichung umschreiben in:

$$47) \qquad \mu^2(u^2 + v^2) + (1 - \mu^2)\, c^2 = c_*^2 = \mu^2 \hat{q}^2$$

Darin sind $\mu = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ und c die kritische Geschwindigkeit[2]. Ist $u^2 + v^2 > c^2$, d.h. handelt es sich um eine Überschallströmung, so stellen die Gleichungen 45 und 46 wieder ein System hyperbolischer partieller Differentialgleichungen für u und v als Funktionen von x und y dar. Die zugehörigen Charakteristiken C_+ und C_- sind Kurven $y = y(x)$, die Charakteristiken Γ_+ und Γ_- Kurven $u = u(v)$ oder $v = v(u)$ in der u-v-Ebene (Hodographenebene). Schreibt man die beiden Differentialgleichungen wieder in Matrixform so erhält man: $A r_x + B r_y = 0$, mit:

$$A = \begin{pmatrix} c^2 - u^2 & -uv \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -uv & c^2 - v^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad r_x = \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}$$

Die Differentialgleichungen für die charakteristischen Flächen ($\varphi = \text{konst.}$) von Seite 35 lautet dann:

$$D \,\|\, A\varphi_x + B\varphi_y \,\| = 0$$

oder ausgerechnet:

$$(c^2 - u^2)\varphi_x^2 - 2uv\varphi_x\varphi_y + (c^2 - v^2)\varphi_y^2 = 0$$

Ihre Bicharakteristiken werden gegeben durch die beiden

---

[1] Die Grenzgeschwindigkeit ist diejenige Strömungsgeschwindigkeit, die für $h \to 0$, d.h. für $\varrho \to 0$ und $p \to 0$ von der Strömung erreicht wird.

[2] Die kritische Geschwindigkeit herrscht in einer Strömung, wenn die Strömungsgeschwindigkeit gleich der örtlichen Schallgeschwindigkeit ist.

Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{ds} = 2(c^2 - u^2)\varphi_x - 2u\cdot v\varphi_y$$

$$\frac{dy}{ds} = 2(c^2 - v^2)\varphi_y - 2u\cdot v\varphi_x$$

Dabei ist "s" der Kurvenparameter längs der charakteristischen Kurven (Bicharakteristiken).

Die Differentialgleichung für die charakteristischen Flächen ergibt direkt die Differentialgleichung für $y = y(x)$, wenn man die Gleichung durch φ_y dividiert (unter der Voraussetzung $\varphi_y \neq 0$) und die Beziehung $\varphi_x/\varphi_y = -y'$ berücksichtigt. Man erhält dann:

$$(c^2 - u^2)(y')^2 - 2uv\,y' + c^2 - v^2 = 0$$

oder

$$c^2(y'^2 + 1) = (uy' + v)^2$$

Daraus folgt, daß die charakteristischen Kurven $y = y(x)$ wieder, wie bei der eindimensionalen instationären Strömung, von der speziellen Lösung $u(x,y)$, $v(x,y)$ abhängen.- Für die Γ-Charakteristiken in der Hodographenebene (u-v-Ebene) erhält man folgende Differentialgleichung[1]:

$$(c^2 - u^2)d^2u - 2uvdu\,dv + (c^2 - v^2)\,d^2v = 0$$

oder

$$c^2(d^2u + d^2v) = (u\,du + v\,dv)^2$$

Daraus folgt, daß die Γ-Charakteristiken nicht von einer speziellen Lösung abhängen, sondern festliegende Kurven in der u-v-Ebene sind. Das bedeutet wieder, daß das Differentialgleichungssystem 45, 46 reduzierbar ist. Man kann also unter der Voraussetzung, daß die Funkrionaldeterminante des Differentialgleichungssytems 45, 46 von 0 verschieden ist, die Differentialgleichungen in ein lineares System partieller Differentialgleichungen für $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ transformieren. Für dieses System lassen sich wieder spezielle Lösungen angeben[2]. - Ist dagegen die

[1] Courant-Friedrichs, Kap. II, S. 46-47

[2] Courant-Friedrichs, Kap. IV A, S. 248 ff

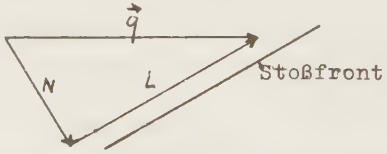
Funktionaldeterminante in einem ganzen Gebiet null, so wird u in diesem Gebiet eine Funktion von v oder v eine Funktion von u. Man kann nun wie bei der eindimensionalen instationären Strömung Elementarwellen als Lösungen einführen und zeigen, daß die Strömung, die sich an ein Gebiet konstanter Strömung anschließt, immer eine Elementarwelle ist. Die beiden möglichen Wellenformen, Verdünnungs- und Kompressionswelle, haben dieselben Eigenschaften, wie im eindimensionalen instationären Fall. Vor allem zeigt sich wieder, daß eine Kompressionswelle zur Ausbildung einer Stoßfront führt. Darüber soll im nächsten Abschnitt berichtet werden.

II 3a Zweidimensionale Stoßfronten

Wie im Falle der eindimensionalen Strömung, so ist auch bei zwei- oder dreidimensionalen Strömungen die Annahme einer stetigen Strömung oft nicht mit den Randbedingungen verträglich. Daher können, wie im eindimensionalen Falle, Unstetigkeiten auftreten. Es zeigt sich, daß wieder viele der auftretenden Strömungsformen durch die Annahme einer Stoßfront beschrieben werden können. Beim Passieren der Stoßfront ändern sich die Dichte, der Druck und die Strömungsgeschwindigkeit plötzlich, und die Größe dieser Änderung wird durch die Erhaltungssätze bestimmt. Es besteht aber im allgemeinen ein Unterschied zwischen zwei- bzw. dreidimensionalen Stoßfronten und eindimensionalen. Während im Falle der eindimensionalen Stoßfront jedes Teilchen, das die Stoßfront passiert, die gleiche Entropieänderung erfährt, nimmt die Entropie der Gasteilchen, die eine zwei- bzw. dreidimensionale Stoßfront auf verschiedenen Stromlinien passieren, im allgemeinen um unterschiedliche Beträge zu. Hinter einer zweidimensionalen Stoßfront handelt es sich daher meistens nicht mehr um eine isentrope Strömung. Eine Ausnahme davon bildet z.B. der ebene schräge Verdichtungsstoß, der in einem entsprechenden Koordinatensystem einem eindimensionalen Stoß äquivalent ist. Schräge Verdichtungsstöße (Stoßfronten) treten z.B. in Überschallströmungen auf, wenn die Strömungsrichtung plötzlich geändert wird.

J I 3b Erhaltungsätze für den ebenen schrägen Stoß

Benutzt man zur Ableitung der Erhaltungssätze für den ebenen schrägen Stoß wieder ein Koordinatensystem, in dem die Stoßfront ruht, so ergibt sich ein Freiheitsgrad mehr als im eindimensionalen Fall, da der Koordinatenursprung längs der Stoßfront mit konstanter Geschwindigkeit bewegt werden kann. Zerlegt man den Vektor der Strömungsgeschwindigkeit der ankommenden Strömung in eine Normal- und eine Tangentialkomponente (Fig. 30), so ergeben die Erhaltungssätze die gleichen Beziehungen wie im eindimensionalen Falle für die mit der Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit verbundene Strömung. Die Tangentialkomponente muß dagegen auf beiden Seiten der Stoßfront gleich sein. Jede Änderung dieser Komponente beim Passieren der Stoßfront müßte infolge des Impulserhaltungsatzes durch Tangentialkräfte, die an der Stoßfront angreifen würden ausgeglichen werden; aber derartige Tangentialkräfte können nicht auftreten, da alle Kräfte, die auf die Gasströmung wirken, als Druckkräfte vorausgesetzt sind. Diese Druckkräfte wirken aber senkrecht auf die Fläche, an der sie angreifen.



Figur 30: Zerlegung der Strömungsgeschwindigkeit in Normal und Tangentialkomponente.

Bezeichnet man die Strömungsgeschwindigkeit mit q, ihre Normalkomponente in bezug auf die Stoßfront mit N, die Tangentialkomponente mit L, die Normalgeschwindigkeit der Stoßfront mit U, so erhält man folgende Gleichungen (Der Index "0" bezeiht sich auf den Zustand vor der Front, der Index "1" auf denjenigen hinter der Stoßfront):

48) $\rho_0(N_0 - U) = \rho_1(N_1 - U)$ Massenerhaltung

49) $\rho_0 N_0(N_0 - U) + p_0 = \rho_1 N_1(N_1 - U) + p_1$ Impulserhaltung

50) $L_0 = L_1$ Stetigkeit der Tangentialkomponente

51) $\frac{1}{2}\rho_0(N_0 - U)q_0^2 + \rho_0(N_0 - U)e_0 + N_0 p_0 =$
$= \frac{1}{2}\rho_1(N_1 - U)q_1^2 + \rho_1(N_1 - U)e_1 + N_1 p_1$

Dabei sind $q^2 = N^2+L^2$ und e_i = Innere Energie pro Masseneinheit. - Für eine stationäre Stoßfront mit U = 0 vereinfachen sich die Gleichungen zu:

52) $N_o \varrho_o = N_1 \varrho_1$ 54) $L_o = L_1$

53) $\varrho_o N_o^2 + p_o = \varrho_1 N_1^2 + p_1$

55) $\frac{1}{2} q_o^2 + i_o = \frac{1}{2} q_1^2 + i_1 = \frac{1}{2} \hat{q}^2$

$\hat{q}$ ist die Grenzgeschwindigkeit (s.S. 75) und "i" die Enthalpie pro Masseneinheit. Die Gleichungen für stationäre schräge Stöße zeigen, daß zu einem festen Zustand "O" vor der Stoßfront eine einparametrige Schar von Zuständen hinter der Stoßfront existiert, die die Stoßbedingungen erfüllen.[1)]

Die quantitative Bestimmung schräger Stöße kann mit Hilfe geometrischer Konstruktionen oder äquivalenter analytischer Methoden ausgeführt werden. Man kann dazu aus den Stoßgleichungen eine Gleichung ableiten, die die Komponenten u und v der Strömungsgeschwindigkeit q_1 hinter einem schrägen Stoß miteinander verknüpft. Die Gleichung, die sog. Stoßpolare[2)], lautet:

56) $$v^2 = (q_o - u)^2 \frac{u - \tilde{u}}{U - u}$$

und bezieht sich auf ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen u und v. Die u-Achse fällt dabei mit der Strömungsrichtung q_o zusammen, d.h. für die Strömung vor der Stoßfront gilt $u_o = q_o$, $v_o = 0$. In der Gleichung sind:

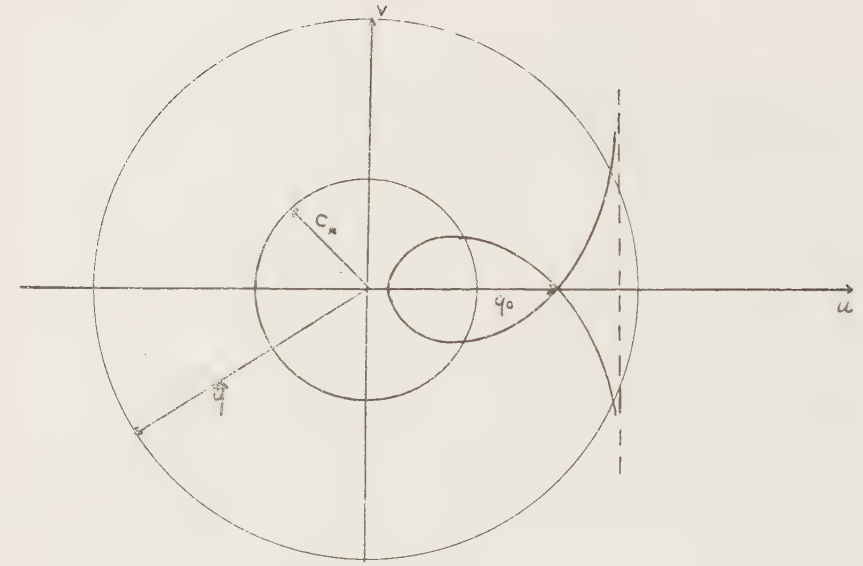
$$\tilde{u} = \frac{c_*^2}{q_o} \quad \text{und} \quad U = (1 - \mu^*) q_o + \tilde{u}$$

gegebene Größen, da sie nur vom Zustand des Gases vor der Stoßfront abhängen. Die durch Gleichung 56 gegebene Kurve in der u-v-Ebene, die von Busemann (81) eingeführte Stoßpolare, ist das bekannte "Descartes'sche Blatt", mit einem "Doppelpunkt" oder isolierten Punkt bei $u = q_o$, $v = 0$ und mit einer Asymptote $u = U$ (Fig. 31). Physikalische Be-

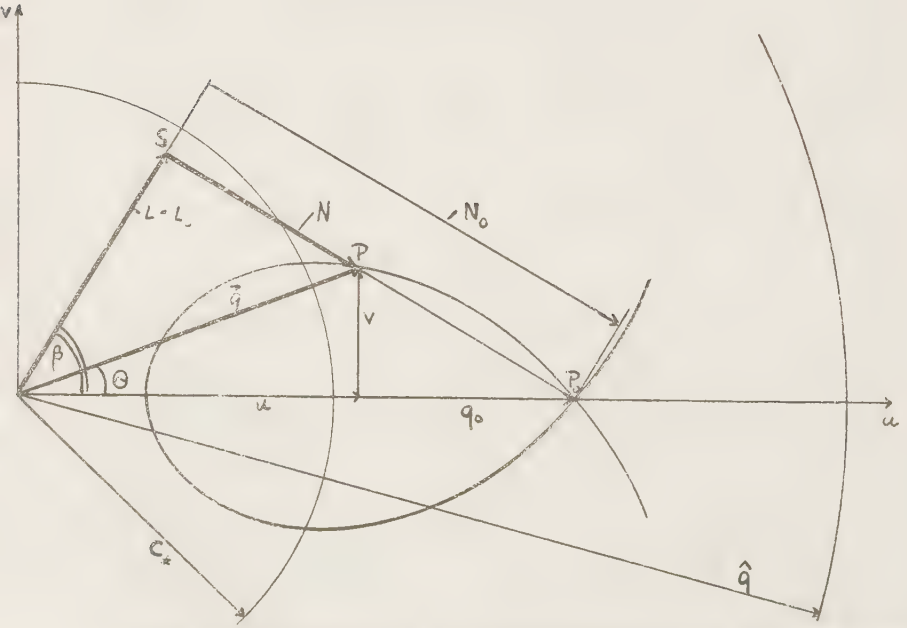
---

1) Hierbei ist auch q_o festgelegt

2) Courant-Friedrichs, Kap. IV C, S. 306-307



Figur 31: Stoßpolare für q_0 c



Figur 32: Konstruktion der Stoßparameter bei vorgegebenem Winkel mit Hilfe der Stoßpolaren in der u-v-Ebene

deutung hat nur der Teil der Stoßpolaren, für den $q^2 = u^2 + v^2 \leq \hat{q}^2 = 1/\kappa \cdot c_*^2$ ist. Es ist der geometrische Ort aller Punkte (u,v), die zu einem Zustand (1) gehören, der über eine stationäre schräge Stoßfront mit einem festen Zustand (0) verbunden werden kann. Der Zweig mit $u < q_0$ kennzeichnet Zustände hinter einer Stoßfront, wenn der gegebene Zustand (0) vor der Stoßfront herrscht. Der Zweig mit $u > q_0$ beschreibt dagegen Zustände vor einer Stoßfront, wenn der gegebene Zustand (0) hinter der Stoßfront liegt. - Mit Hilfe der Stoßpolaren lassen sich die Richtung der Stoßfront und des Vektors der Strömungsgeschwindigkeit hinter der Stoßfront bestimmen, wenn die Geschwindigkeit $q_0 > c_*$ vor der Stoßfront gegeben ist. Für jeden Punkt P auf der Stoßpolaren findet man die Geschwindigkeit hinter der Stoßfront in dem Vektor OP (Fig. 32). Der Winkel Θ zwischen dem Vektor OP und der u-Achse ist gleich dem Winkel, um den die Strömung durch die Stoßfront abgelenkt wird. Die Richtung der Stoßfront, die mit der Strömungsrichtung vor der Front den Winkel β bildet, wird durch das LOt auf die Strecke PP_0 gegeben. P_0 ist der Endpunkt des Vektors q_0 und damit der "Doppelpunkt" der Stoßpolaren. Die Komponenten $L_0 = L_1$, N_0 und N_1 der Vektoren q_0 und q_1 in Bezug auf die Stoßfront erhält man ebenfalls aus dem Diagramm.

Aus dem Diagramm folgt weiter, wie man auch durch eine Rechnung zeigen kann, daß der Winkel β zwischen der Stoßfront und dem Strömungsvektor q_0 größer ist als der Winkel Θ zwischen $\vec{q}$ und $\vec{v}_0$, $\Theta < \beta$. - Die Strömung hinter der Stoßfront kann Überschall-, $q > c$, oder Unterschallgeschwindigkeit, $q < c$, haben. Der erste Fall tritt bei relativ schwachen Stößen, der zweite bei relativ starken auf. Ein senkrechter Stoß wird durch den Schnittpunkt der Stoßpolaren mit der u-Achse gegeben (S. Gl. 56), $q = c_*^2 / q_0 \cong \tilde{u}$.

Ferner entnimmt man der Darstellung, daß ein größter Winkel $\Theta = \Theta_{extr}$ existiert, so daß für $\Theta > \Theta_{extr}$ keine Stoßfronten möglich sind, während für $\Theta \leq \Theta_{extr}$ zwei mögliche Stöße gegeben werden, ein schwacher und ein starker, mit einer geringen bzw. starken Änderung der Geschwindigkeit. Wenn Θ klein wird, so erhält man im Grenzfall entweder eine schwache Störung, "Schallwelle", oder einen starken senkrechten

Stoß. Der Winkel β ist bei einer Schallwelle gleich dem Mach'schen Winkel A ($\sin A = c/q$) und bei einem senkrechten Stoß gleich 90°. Beim Übergang von dem einem Winkel zum anderen erreicht β einen Wert $\beta = \beta_{extr}$, der zu dem größten Winkel ϑ_{extr} gehört. Für die Winkel ϑ und β kann man eine obere und untere Schranke angeben. Man findet[1] $\hat{\vartheta}_{extr} \leq \vartheta_{ext} \leq 90^\circ$ und $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\vartheta_{extr} \leq \beta_{extr} \leq 90^\circ$, wobei $\hat{\vartheta}_{extr}$ durch die Gleichung $\sin \hat{\vartheta}_{extr} = 1/\gamma$ gegeben wird.

4 Linearisierte Gleichungen

Die nicht linearen Gleichungen der Hydrodynamik können angenähert als lineare Gleichungen behandelt werden, wenn man es mit einem praktisch konstanten Strömungszustand zu tun hat, dem sich kleinere Schwankungen überlagern. Im Fall der zweidimensionalen stationären Strömung erhält man z.B. folgende linearisierten Gleichungen. Setzt man $u = \bar{u} + u'$, $v = v'$, $\varrho = \bar{\varrho} + \varrho'$, wobei u', v' und ϱ' kleine Größen sind und nimmt an, daß die Strömung in erster Näherung unter Vernachlässigung der Produkte und höherer Ableitungen der Größen u', v' und ϱ' beschrieben werden kann, so erhält man aus dem Differentialgleichungssystem 42 bis 44 von Seite 52 die folgenden drei Gleichungen[2]:

$$57) \qquad \bar{u}\,\bar{\varrho}\,u_x' + c^2\varrho_x' = 0$$

$$58) \qquad \bar{u}\,\bar{\varrho}\,v_x' + c^2\varrho_y' = 0$$

$$59) \qquad \bar{\varrho}\,(u_x' + v_y') + \bar{u}\,\varrho_x' = 0$$

wobei $c = c(\bar{\varrho})$ ist. Aus 57) und 58) folgt durch Differentiation sofort: $u'_{xy} = v'_{xx}$

also $u'_y - v'_x = F(y)$

wobei F(y) eine beliebige Funktion ist. Diese Gleichung entspricht dem sog. Wirbelsatz[1]. Setzt man nun $\frac{\bar{u}}{c} = k$, so erhält man:

$$60) \qquad k\,\bar{\varrho}\,v'_{xx} + c\,\varrho'_y = 0$$

$$61) \qquad k\,\bar{\varrho}\,v'_y - (1 - k^2)c\,\varrho'_x = 0$$

---

1) Courant-Friedrichs, Kap. IV C, S. 314

2) Courant-Hilbert Bd. II, S. 436-437

und daraus die beiden Differentialgleichungen

62) $$(1 - k^2)\, v'_{xx} + v'_{yy} = 0$$

63) $$(1 - k^2)\, \rho'_{xx} + \rho'_{yy} = 0$$

Aus diesen Gleichungen entnimmt man sofort, daß es sich im Fall $k > 1$, also $u > c$, um hyperbolische partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung handelt (Wellengleichung). Die Charakteristiken sind in diesem Falle gerade Linien, die mit der x-Achse (Hauptströmung) den Winkel α, sog. "Mach'schen Winkel", bilden. Er wird durch die Gleichung $\sin\alpha = 1/k = c/u$ gegeben.

IV Ausbreitung einer Detonation in einem Rohr

Breitet sich eine Detonation in einem Rohr konstanten Querschnitts aus, so kann man die entstehende Strömung als Lösung der Differentialgleichungen der eindimensionalen zeitabhängigen Strömung beschreiben. Diese Lösung wurde von Chapman und Jouguet gegeben (s.S. 50/51). - Handelt es sich um eine Detonation mit konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit, so kann man den Vorgang in einem Koordinatensystem behandeln, in dem die Stoßfront ruht. In diesem Koordinatensystem erhält man dann folgende Strömung (s.Fig. 28 S. 50): Das Gas strömt mit Überschallgeschwindigkeit von $x \to -\infty$ bis $x = 0$. An der Stelle $x = 0$ befindet sich die Detonationsfront, ein senkrechter Stoß. Hinter dem Stoß läuft in einem Gebiet[1] $0 \leq x \leq x_0$ eine exotherme chemische Reaktion ab, die der Strömung Wärme zuführt. Infolge dieser Wärmezufuhr nimmt im Gebiet $0 \leq x \leq x_0$ die Strömungsgeschwindigkeit zu, bis sie an der Stelle $x = x_0$ (Chapman-Jouguet-Ebene) Schallgeschwindigkeit erreicht hat. An dieser Stelle ist die chemische Reaktion und damit auch die Wärmezufuhr beendet (Chapman-Jouguet-Bedingung). In dem Gebiet $x > x_0$ läuft eine Verdünnungswelle in Richtung der negativen x-Achse, deren Form von den Randbedingungen bei $x = x_0$ und $x = +\infty$ abhängt. Die Front der Verdünnungswelle ist in bezug auf die Detonationsfront stationär. In das Gebiet $x \leq x_0$ kann sie nicht eindringen, da ihre Aus-

[1] Die Größe des Gebietes geht in die Theorie nicht ein

breitungsgeschwindigkeit gleich der örtlichen Schallgeschwindigkeit ist (s.S. 45/46), und das Gas bei $x = x_0$ mit Schallgeschwindigkeit in Richtung der positiven x-Achse strömt. Bei dieser Lösung der hydrodynamischen Differentialgleichungen ist der Einfluß der Rohrwand vernachlässigt worden. Will man nun zu einer Lösung gelangen, die der Wirklichkeit besser entspricht, so muß man den Einfluß der Rohrwand auf die Strömung berücksichtigen. Es soll daher zunächst der Einfluß der Rohrwand diskutiert werden.

Einfluß der Rohrwand

Bei den meisten Problemen der Gasdynamik kann man den Einfluß der Zähigkeit auf die Strömung im großen und ganzen vernachlässigen. Nur in der Nähe fester Wände muß man die Zähigkeit innerhalb einer dünnen Schicht (Grenzschicht) berücksichtigen. Da nämlich die Strömung an einer festen Wand abgebremst wird und zum Stillstand kommt - an einer ruhenden Wand muß die Geschwindigkeit infolge der Reibung null sein - werden die Reibungskräfte von der Größenordnung der Trägheitskräfte. Daher können sie in der genannten Schicht nicht vernachlässigt werden. Man gelangt so für die Strömung in der Nähe fester Wände zu einem Modell, daß von Prandtl eingeführt worden ist, und bei dem die Druckverteilung in der Strömung zunächst unabhängig von der Reibung und Wärmeleitung berechnet wird. Danach bestimmt man die durch die Reibung in Wandnähe erzeugte Strömung mit Hilfe der Grenzschichttheorie. - Treten nun weder Ablösen der Grenzschicht noch besonders hohe Druckgradienten auf, so ist die Strömung außerhalb der Grenzschicht praktisch unabhängig von der Grenzschichtströmung. Für die Stromlinien der Hauptströmung fallen nicht mehr mit der Wand zusammen, sondern liegen im Abstand der Grenzschichtdicke von der Wand. Dieser Effekt kann jedoch meistens vernachlässigt werden. Dagegen hängt die Grenzschichtströmung stark von der Druckverteilung längs der Wand in der Hauptströmung ab. - Treten nun Stoßwellen in einer Strömung auf, die sich bis in die Nähe der Wand erstrecken, so erzeugen sie derartig starke Druckgradienten in der Grenzschicht, daß diese daher stark beeinflußt wird. Die Änderung der Grenzschichtströmung wirkt sich

wiederum auf die Hauptströmung aus, und zwar breiten sich Kompressions- und Expansionswellen in die Strömung hinein aus. Diese beeinflussem wieder die Gestalt der ursprünglichen Stoßfront. Daher besteht in diesem Fall eine starke Wechselwirkung zwischen der Grenzschichtströmung und der Hauptströmung[1].

Strömung hinter einer Detonationsfront

Breitet sich eine Detonation in einem Rohr aus, so wird das Gas hinter der Stoßfront in Bewegung gesetzt und strömt in Richtung der Stoßfrontbewegung. An der Wand wird das Gas abgebremst, und es bildet sich hinter der Stoßfront eine Grenzschicht (51, 65) aus. - Inwieweit wirkt sich diese Grenzschichtbildung nun auf die Detonation aus? - Wollte man diese Frage genau beantworten, so mußte man, wie schon ausgeführt, die Differentialgleichungen der kompressiblen reibenden Strömung (Navier-Stokes'sche-Gleichungen) lösen. Da dies praktisch nicht möglich ist, soll die Hauptströmung hinter der Stoßfront als im wesentlichen unabhängig von der Grenzschichtströmung behandelt werden, wie es das Prandtl'sche Modell verlangt. Das Vorhandensein der Grenzschicht soll lediglich dadurch berücksichtigt werden, daß die Strömungsgeschwindigkeit der Gase an der Wand vorgegeben wird. Es wird sich im folgenden zeigen, daß sich damit die wesentlichen Beobachtungen an Detonationen begründen lassen. - Es ergibt sich somit folgendes, eingangs (S. 13-15) ~~eingange~~ angeführtes Randwertproblem:

Gibt es eine stationäre Lösung der hydrodynamischen Differentialgleichungen, die bei vorgegebener Machzahl der anströmenden Gase folgende Randbedingung erfüllt?

1. Der Zustand hinter der Stoßfront (x = 0) ist durch die Vorgabe der Machzahl der anströmenden Gase gegeben.

2. Am Chapman-Jouguet-Punkt soll die Strömungsgeschwindigkeit der Gase gleich der örtlichen Schallgeschwindigkeit sein. Dadurch ist der Zustand am Chapman-Jouguet-punkt völlig bestimmt.

3. Die Strömungsgeschwindigkeit der Gase an der Wand ist nach Größe und Richtung vorgegeben, und zwar soll die gleich D, der Geschwindigkeit der Wand, sein.

---

[1] Vgl. A.H. Shapiro (82) Bd. II, S. 1130 ff.

Bevor das Randwertproblem behandelt werden kann, ist noch die Frage zu klären, ob eine Randkurve in bezug auf die Strömung zeitartig oder raumartig[1] ist. Raumartige Kurven sind im Falle der hydrodynamischen Differentialgleichungen Kurven, die sich in bezug auf die Strömung mit Überschallgeschwindigkeit bewegen; zeitartig heißen Kurven, deren Geschwindigkeit in bezug auf die Strömung kleiner als die örtliche Schallgeschwindigkeit ist. Die Antwort auf die Frage lautet daher, wenn man das auf den Seiten 13 bis 15 Ausgeführte berücksichtigt:

1. Die Stoßfront ist raumartig in bezug auf das Gas vor ihr ($-\infty < x < 0$) und zeitartig in bezug auf das Gas im Gebiet $0 \leq x \leq x_0$
2. Die Wand ist in bezug auf die Strömung im Gebiet $0 \leq x \leq x_f$ raumartig, da sie sich mit Überschallgeschwindigkeit[f] (s.S. 15) bewegt. In bezug auf die Strömung im Gebiet $x_f < x < +\infty$ ist die Wand zeitartig.
3. Die Chapman-Jouguet-Ebene $x = x_0$ ist als Übergangskurve eine charakteristische Kurve (s.S. 44) und daher weder raum- noch zeitartig.

Was bedeutet das nun im Zusammenhang mit dem Randwertproblem? - Die Eigenschaft einer Randkurve zeitartig, raumartig oder charakteristisch zu sein, ist entscheidend für die Anzahl der Randbedingungen, die längs dieser Kurve vorgeschrieben werden können[2]. - Im Falle der hydrodynamischen Differentialgleichungen der kompressiblen isentropen wirbelfreien Strömung können längs einer raumartigen Kurve zwei Randbedingungen vorgegeben werden, längs einer zeitartigen eine und ebenfalls eine längs einer charakteristischen Kurve. Sind nun längs einer Randkurve mehr Randbedingungen vorgeschrieben als erlaubt, so existiert keine eindeutige stetige Lösung der zugrundeliegenden Differentialgleichungen für das Randwertproblem. Praktisch bedeutet das, daß dann in der Strömung Unstetigkeiten auftreten.

Nach diesen Vorbereitungen soll nun das Randwertproblem diskutiert werden, und zwar unter der Annahme einer eindimensionalen Hauptströmung. Das bedeutet, die Detonation

---

[1] Wegen der Definition der Begriffe zeit- und raumartige Kurven bzw. Flächen bei hyperbol. Dgl. vgl. Courant-Hilbert Kap. VI, S. 569 u. S. 589ff. und Courant-Friedrichs, Kap. III, S. 84

[2] Courant-Hilbert, Bd. II, Kap V, S. 461-478 u. Kap. VI, S. 618-636 und Courant-Friedrichs Kap. III, S. 84-85

breitet sich in einem Rohr aus, das nur in Richtung der y-Achse begrenzt ist, und die Ausbreitungsrichtung der Detonation fällt mit der x-Achse zusammen. Dabei soll zunächst der Einfluß der Wand auf die Schwaden (verbranntes Gas) bestimmt werden und die Stoßfront zusammen mit der Reaktionszone zu einer Unstetigkeitsfläche vereinigt werden. Längs der Wand, die in diesem Fall zeitartig ist, sind nun zwei Randwerte vorgegeben, nämlich die Normal- und Tangentialkomponente der Strrömungsgeschwindigkeit. D.h. es sind mehr Randwerte vorgegeben als erlaubt. Längs der Chapman-Jouguet-Ebene ($x = x_0$) sind ebenfalls mehr Randwerte vorgegeben als erlaubt, nämlich die Dichte und die beiden Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit. Daraus folgt aber sogleich, daß eine eindeutige stetige Lösung des Randwertproblems nicht existiert. Es müssen also Unstetigkeiten auftreten. Als solche kommen zunächst, da es sich um einen instationären Vorgang handelt, die Wand bewegt sich ja relativ zum Gas, Kompressionswellen und Expansionswellen in Frage. Die Kompressionswellen können unter geeigneten Umständen in eine Stoßwelle übergehen. - In der Kompressionswelle nimmt die Temperatur zu und auch die Schallgeschwindigkeit. Wird dabei die Schallgeschwindigkeit größer als die Geschwindigkeit der Wand, so kann sich nun eine Verdünnungswelle von der Wand her in das Gas hinein ausbreiten. Sie läuft hinter der Kompressionswelle her und kann sie einholen und schwächen. Da sich die Wellen im wesentlichen nicht in Richtung der x-Achse ausbreiten werden, weicht die Strömung natürlich von einer eindimensionalen Strömung ab. Hinter einer schwachen Kompressionswelle bzw. Expansionswelle wird diese Abweichung allerdings klein sein. Daher soll bei der weiteren Dikussion die Abweichung von der eindimensionalen Strömung im großen und ganzen vernachlässigt werden. - Kommt es allerdings zur Ausbildung schräger Stöße, so werden die Abweichungen größer, und man muß eine zwei- oder dreidimensionale Strömung betrachten. Die Strömungsgeschwindigkeit hinter einer schwachen schrägen Stoßwelle kann in bezug auf die Front der Welle Überschallgeschwindigkeit haben, so daß eine Verdünnungswelle die Front nicht einholen kann, wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Front der Verdün-

nungswelle mit der Strömungsrichtung hinter der Stoßfront zusammenfällt. Verdünnungswellen, die sich in Richtung der Normalen der Stoßfront bewegen, holen sie natürlich immer ein.

Behandelt man die Strömung nun zunächst als stationär und den Einfluß der Rohrwand direkt hinter der Chapman-Jouguet-Ebene als schwache Störung, dann kann die Ausbreitungsrichtung der Störungen, die sich längs der zugehörigen Charakteristiken ausbreiten, mit Hilfe der auf Seite 60 gegebenen Beziehungen bestimmt werden. Danach gilt für den Winkel A, den die Ausbreitungsrichtung (Charakteristiken) der Störungen mit der Strömung bildet, $\sin A = \frac{c}{q}$. Da nun $q = c$, folgt $\sin A = 1$, also $A = 90^\circ$, d.h. die Störungen breiten sich senkrecht zur Strömung aus. - Andererseits gilt allgemein für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung bei instationärer Strömung (S. 35/36):

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \gamma c \qquad \frac{dy}{dt} = v \pm \delta c$$

Darin sind γ und δ die Richtungskosinus der Unstetigkeitsfläche (Wellenfront) in bezug auf die Koordinatenachsen, mit $\gamma^2 + \delta^2 = 1$. Benutzt man das obige Ergebnis und setzt $\delta = 1$, so folgt $\gamma = 0$ und damit, da $v \approx 0$:

$$\frac{dx}{dt} = U \qquad \frac{dy}{dt} = \pm c$$

d.h. Die Wellenfront der Störungen breitet sich senkrecht zur Strömungsrichtung mit Schallgeschwindigkeit aus und in Richtung der Strömung mit der Strömungsgeschwindigkeit "u". Das bedeutet aber nur, daß sich eine Störung, die sich mit Schallgeschwindigkeit in den Schwaden ausbreitet, niemals gegen die Strömungsrichtung bewegen kann, da die Strömungsgeschwindigkeit gleich der örtlichen Schallgeschwindigkeit ist.

Wie steht es nun mit der Ausbildung einer Stoßwelle? - Die Störungen, die sich von der Wand in die Schwaden hinein ausbreiten, laufen in einem Gas, in dem chemisches Gleichgewicht eingestellt ist. Schwache Störungen werden aber bei der Ausbreitung in einem Gas, in dem chemisches

Gleichgewicht herrscht, gedampft, wie u.a. Wegener (83) gezeigt hat. - Ferner läuft hinter jeder Detonation eine Verdünnungswelle, die ebenfalls die Störungen dämpft. Da die Wellenfront der Verdünnungswelle in dem gewählten Koordinatensystem stationär ist, die Störungen sich aber mit Strömungsgeschwindigkeit in Richtung der positiven x-Achse bewegen, gelangen sie auf jeden Fall in den Bereich der Verdünnungswelle. Man kann also zunächst feststellen, daß der Ausbildung einer Stoßwelle zwei Arten der Dämpfung entgegenwirken. Daher wird es von der Stärke der Dämpfung abhängen, ob sich eine Stoßwelle ausbildet oder nicht. Wann dieser Fall eintreten kann, wird im folgenden diskutiert werden. - Vorerst soll noch die Ausbreitungsrichtung der möglichen Stoßfronten bestimmt werden. Man sieht sofort, daß eine in dem gewählten Bezugssytem stationäre Stoßwelle im verbrannten Gas nicht möglich ist, da das Gas vor ihr nur mit Schallgeschwindigkeit strömen würde. Das Gas vor einer Stoßfront muß sich aber stets mit Überschallgeschwindigkeit in bezug auf die Stoßfront bewegen. Aus dem gleichen Grunde scheiden auch schwache Stoßwellen aus, die sich in Stromrichtung (positive Richtung der x-Achse) ausbreiten. Jede entstehende schwache Stoßwelle bewegt sich also in Richtung der negativen x-Achse und kann somit die Detonationsfront einholen und beeinflussen.

Läßt man nun die Voraussetzung, daß die Detonationsfront zusammen mit der Detonationszone als eine einzige Unstetigkeit behandelt werden kann, fallen, dann stellt sich das auf Seite 14/15 formulierte Randwertproblem. Die mathematische Behandlung dieses Randwertproblems verläuft im wesentlichen genauso wie bei dem auf Seite 64/65 behandelten. Die Wand ist jetzt allerdings im Gebiet $0 \leq x \leq x_f$ raumartig in bezug auf die Strömung und wieder zeitartig im Gebiet $x_f < x < +\infty$. Die Chapman-Jouguet-Ebene ist wieder charakteristisch, und die Stoßfront ist zeitartig, da sie sich in bezug auf das Gas mit Unterschallgeschwindigkeit bewegt. Längs der Stoßfront, der Chapman-Jouguet-Ebene und dem zeitartigen Abschnitt der Rohrwand darf daher wieder nur je eine Randbedingung vorgegeben werden. Es sind aber wieder mehr vorgegeben, also existiert wiederum keine eindeutige stetige Lösung des Problems, und es müs-

sen wieder Unstetigkeiten eingeführt werden. Dabei ändert sich allerdings die Ausbreitungsrichtung dieser Unstetigkeiten etwas. Da nämlich in dem Raum zwischen der Stoßfront und der Chapman-Jouguet-Ebene die Strömungsgeschwindigkeit kleiner als die Schallgeschwindigkeit ist, können sich auch schwache Störungen (Schallwellen) in Richtung der Detonationsfront ausbreiten. - Ein wesentlicher Unterschied besteht im Gegensatz zu der schon behandelten Aufgabe für das Gebiet $0 \leq x \leq x_0$. Da hier die Strömungsgeschwindigkeit, wie schon erwähnt, kleiner als die örtliche Schallgeschwindigkeit ist, wird das gesamte Gebiet von den Störungen von der Wand beeinflußt. Betrachtet man die Störungen wieder als schwach, so kann man die linearisierten Differentialgleichungen der instationären Strömung benutzen, um den sich ausbildenden Zustand zu bestimmen. Sie lauten[1]:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \Delta \rho \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \phi$$

Darin ist Δ der Laplace Operator ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ in kartesischen Koordinaten) und ϕ das Geschwindigkeitspotential. Man ernält daraus ρ zu $\omega = \text{grad}\,\phi$. Unter den gemachten Voraussetzungen stellt sich für die Differentialgleichungen folgendes Randwertproblem: Gesucht ist eine Lösung der Differentialgleichungen, die die inhomogene Randbedingung

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} + h\rho = \bar{\rho} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial n} + h\phi = u$$

erfüllt. Dabei ist "h" eine Konstante und "U" bzw. "$\bar{\rho}$" die an der Oberfläche des Gebietes vorgegebene Geschwindigkeits- bzw. Dichteverteilung. Außerdem sind ρ und $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ bzw. ϕ und $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ für $t = 0$ willkürlich vorgegebene Funktionen in dem Gebiet. Das Randwertproblem wird gelöst durch[2]:

$$64) \qquad \phi = \sum A_n u_n \cos \omega_n t + \sum B_n u_n \sin \omega_n t$$

wobei die U_n (z.B. $u_n = u_n(x,y,z)$) die zu der gegebenen Randbedingung gehörigen Eigenfunktionen der folgenden

[1] Vgl. z.B. Sommerfeld Bd. 2, S. 92

[2] Sommerfeld, Bd. 6, S. 167

Differentialgleichung für das Gebiet sind:

65) $$\Delta\phi + k^2\phi = 0$$

Handelt es sich um aperiodische Vorgänge, so treten an die Stelle der Summen Fourier-Integrale. Ist das System der Eigenfunktionen in irgendwelchen Koordinaten separierbar, die der Oberfläche des Gebietes angepaßt sind, so zerlegt sich die in Gleichung 64) auszuführende Summierung[1] in drei Summen entsprechend den drei Koordinaten. Beim Quader ergibt das z.B.:

66) $$\sum_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} A_{nml}\, u_{nml} \cos\omega_{nml} t +$$

(n, m und l ganze Zahlen)
Lösungen der Gleichung, die Eigenfunktionen des Problems, sind Wellen, und zwar je nach der Berandung des Gebietes Sinuswellen, Zylinderwellen oder Kugelwellen. Im Falle eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c erhält man für die Eigenfunktionen:

67) $$u = u_{nml} = \cos n\pi\frac{x}{a}\cos m\pi\frac{y}{b}\cos l\pi\frac{z}{c}$$

und im Falle eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h:

68) $$u_{nml} = J_n(k_{nl}\cdot r)\, e^{i n\varphi}\cos m\pi\frac{z}{h}$$

(I_n = Besselfunktion n-ter Ordnung)
Ist nun eine der Seitenabmessungen sehr viel kleiner als die anderen beide, so wird die zugehörige Wellenlänge sehr klein, die Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ sehr groß. Je größer nun "k" (der Eigenwert) ist, desto feiner wird die Unterteilung des Gebietes in Gebiete abwechselnden Vorzeichens; für $k \to \infty$ rücken die Knotenlinien überall dicht zusammen[2]. Auf Grund der geschilderten Verhältnisse können sich also in dem Gebiet $0 \leq x \leq x_0$, wenn die Länge der Reaktionszone nicht zu klein ist, Schwingungen ausbilden. Das ergibt eventuell den bei Detonationen beobachteten kurzwelligen Spin und ist überhaupt die Ursache für das Auftreten des normalen Spins. Beide Spinarten würden danach auftreten,

[1] Sommerfeld, Bd. 6, S. 172
[2] Sommerfeld, Bd. 6, S. 161

wenn die Länge der Reaktionszone eine untere Schranke überschreitet und die Störungen das Gebiet merklich beeinflussen.

Die Ausbreitung der Störungen innerhalb der Reaktionszone erfolgt jetzt in einem Gas, das chemisch reagieren kann. Da nun in einer Kompressionswelle die Temperatur zunimmt, wird die Reaktion bei geeigneter Reaktionszeit beschleunigt und der Welle durch die freiwerdende Wärme Energie zugeführt. D.h. aber, daß jetzt eine Kompressionswelle eher in eine Stoßwelle übergehen kann. Dabei wird es sich um eine schräge Stoßwelle handeln, die sich in Richtung der negativen x-Achse ausbreitet und die Detonationsfront beeinflußt, in dem sie sie verstärkt. Dadurch wird der Zustand am Chapman-Jouguet-Punkt beeinflußt, und zwar erhöht sich die Temperatur und damit die Schallgeschwindigkeit, während die Strömungsgeschwindigkeit kleiner als die örtliche Schallgeschwindigkeit wird. Infolge dieser Veränderung ist die Chapman-Jouguet-Bedingung verletzt und Verdünnungswellen dringen in die Reaktionszone ein, und zwar sowohl von der Wand als auch von hinten. Die Verdünnungswellen gelangen ebenfalls zur Detonationsfront und schwächen sie wieder. Dadurch ändert sich wieder der Zustand am Chapman-Jouguet-Punkt, und zwar sinken Temperatur und Schallgeschwindigkeit, während die Strömungsgeschwindigkeit größer als die örtliche Schallgeschwindigkeit werden kann. Dann können aber keine Verdünnungswellen mehr in die Reaktionszone eindringen, und die Reaktionsfront bleibt hinter der Stoßfront zurück. Kann dabei die Reaktion in der Verdünnungswelle noch ablaufen und reicht die freiwerdende Energie aus, um die Geschwindigkeit der Gase auf die örtliche Schallgeschwindigkeit zu erniedrigen, so holt die Reaktionsfront die Stoßfront wieder ein. Dabei entsteht kurzzeitig wieder eine stabile Detonation. Dann wiederholt sich der ganze Vorgang wieder. So ergibt sich eine andere Form des Spins, die wahrscheinlich mit der eben genannten gekoppelt ist.

IV 1 Zusammenfassung

Durch die Untersuchung eines Randwertproblems konnte gezeigt werden, daß hinter einer Detonationsfront Unstetigkeiten (Stoßwellen) entstehen, die sich aus einer Kompres-

sionswelle bilden. Mit diesem wesentlich neuen Ergebnis erhält man für die Ausbreitung einer Detonation in einem Rohr folgendes Bild: Hinter der Front einer Detonation werden die in Bewegung gesetzten Gase an der Wand abgebremst und daher komprimiert. Es breiten sich so von der Wand Kompressionswellen in das Gas hinein aus, und zwar breitet sich die Wellenfront in Richtung der Detonationsfront nur mit der Strömungsgeschwindigkeit "u" aus. Ist die Reaktionszone (Übergangszone) kurz, so werden die Wellen hauptsächlich im verbrannten Gas (Schwaden) laufen und daher gedämpft. Außerdem werden sie von der Verdünnungswelle, die hinter jeder Detonation mit der Geschwindigkeit u + c herläuft, eingeholt und ebenfalls gedämpft. Es kann sich daher in diesem Fall kaum eine Stoßwelle ausbilden. Wird dagegen die Reaktionszone länger, so dringen die Kompressionswellen merklich in sie ein und beschleunigen die Reaktion. Dadurch wird ihnen selbst Energie zugeführt, und es bildet sich eventuell eine schräge Stoßwelle aus. Die Stoßwelle läuft mit einer höheren Geschwindigkeit als die Detonationsfront, holt daher letztere ein und verstärkt sie. Für die so entstandene Detonation gilt aber die Chapman-Jouguet-Bedingung nicht mehr, so daß Verdünnungswellen in die Reaktionszone eindringen können. Diese Verdünnungswellen setzen sich aus Wellen von der Wand und der vorhandenen Verdünnungswelle von hinten zusammen. Die Wellen holen ebenfalls die Detonationsfront ein und verringern ihre Geschwindigkeit. Führt die Reaktion der Strömung dabei so viel Wärme zu, daß ihre Geschwindigkeit wieder auf Schallgeschwindigkeit in bezug auf die Detonationsfront kommt, so kann der Vorgang sich wiederholen. Es kommt also zu einem periodischen Schwanken der Detonationsgeschwindigkeit um die stabile Geschwindigkeit. Werden die Verdünnungswellen stärker und stärker, so weicht der Zustand am Chapman-Jouguet-Punkt immer mehr vom Gleichgewichtszustand ab, d. h. die Schwankungen werden immer größer. In der Verdünnungswelle, die immer stärker in die Reaktionszone eindringt, muß der Strömung dann immer mehr Energie zugeführt werden, um die Strömungsgeschwindigkeit wieder auf Schallgeschwindigkeit in bezug auf die Stoßfront zu bringen. Gelingt das nicht mehr, so bleibt die Reaktionsfront hinter der Stoßfront zurück und die Detonation erlischt. Sinkt

dabei die Temperatur nur soweit, daß die Verbrennung sich noch als Flamme ausbreiten kann, so kommt es eventuell wieder zum Anlaufen einer Detonation. Damit würde sich in diesem Bereich ein periodisches Anlaufen und Erlöschen einer Detonation ergeben. Der geschilderte Vorgang entspricht der schon von Jost (84) gegebenen Deutung des Spins. - Sinkt die Temperatur dagegen in der Verdünnungswelle zu sehr ab, so erlischt die Reaktion völlig und die Ausbreitung einer Verbrennung unterbleibt.

V Auswertung und Diskussion

Die Messungen der Detonationsgrenzen an den Systemen H_2-O_2-N_2, H_2-O_2-He, H_2-O_2-Ar, CH_4-O_2 und C_2H_4-O_2 in Abhängigkeit vom Rohrdurchmesser ergaben im wesentlichen folgendes:

1. Es existiert eine Abhängigkeit der Detonationsgrenzen vom Rohrdurchmesser
2. Zwischen der Grenzkonzentration des Brenngases und dem reziproken Grenzdurchmesser besteht ein linearer Zusammenhang
3. Die Grenzen im System H_2-O_2 werden durch Inertgaszusatz beeinflußt
4. Im System H_2-O_2-Inertgas verhalten sich bei konstantem Inertgasgehalt die Neigungen der Grenzgeraden der oberen und unteren Grenze wie 1:2
5. Bei konstantem Rohrdurchmesser bleiben die Machzahl "M" der Detonationsfront und die Größe γM^4 im System H_2-O_2-Inertgas an der Grenze praktisch konstant
6. In der Nähe der Grenzen tritt immer Spin auf
7. Die Detonationsgeschwindigkeit hängt nicht merklich vom Rohrdurchmesser ab

Aus der theoretischen Behandlung eines Randwertproblems, das den Einfluß der Wand auf die Ausbreitung einer Detonation berücksichtigte ergab sich, daß hinter der Detonationsfront Störungen von der Wand in das Gas eindringen, und zwar anfangs Kompressionswellen und Expansionswellen, später schwächere Stoßwellen und ebenfalls Verdünnungswellen. Diese Folgerungen konnten aus der Tatsache gezogen werden, daß sich die Rohrwand in dem gewählten Koordinatensystem mit Überschallgeschwindigkeit bewegte. Ferner zeig-

te sich, daß Störungen, die sich in die Reaktionszone hinein ausbreiten, zur Ausbildung von Schwingungen innerhalb der Reaktionszone führen können, während Störungen, die sich in den Schwaden ausbreiten, keine Schwingungen ergeben. Da in den Schwaden die Strömungsgeschwindigkeit gleich oder durch den Wandeinfluß größer als die Schallgeschwindigkeit ist (in bezug auf die Stoßfront), breiten sich Störungen nur in Richtung der positiven x-Achse längs der zugehörigen Charakteristiken aus und entfernen sich von der Chapman-Jouguet-Ebene in die Verdünnungswelle hinein.

Bevor nun die theoretischen Ergebnisse weiter ausgewertet werden, soll die Eindringtiefe der Störungen innerhalb der Reaktionszone abgeschätzt werden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störungen ist, wie gezeigt, gleich der örtlichen Schallgeschwindigkeit. Soll nun z.B. die Eindringtiefe vergleichbar mit dem Rohrdurchmesser werden, so kann für eine Abschätzung $r = 1$ mm gesetzt werden. Dann muß gelten: $r = c \cdot \tau$, wobei τ einer charakteristischen Reaktionszeit (z. B. der Induktionszeit) entspricht. Setzt man nun $r = 1$ mm, $c = 1$ km/sec ein (das entspricht ungefähr der Schallgeschwindigkeit hinter einer Detonationsfront), so folgt $\tau = 10^{-6}$ sek $= 1\,\mu$s. - Es ist nun bekannt (85), daß Zündverzugszeiten für stöchiometrische Wasserstoff-Luft-Gemische bei 20 at und 1000°K in der Größenordnung von 50 μs liegen. Für Gemische, wie sie an den Detonationsgrenzen bei Knallgas-Inertgas-Gemischen auftreten, darf man annehmen, daß die Zündverzugszeiten gleich oder sogar größer sind. Daraus folgt aber, daß jede Störung von der Wand in die Reaktionszone eindringen kann, und zwar über mehrere Zentimeter. Ist nun der Rohrdurchmesser kleiner als der Ausbreitungsweg der Störungen innerhalb der Reaktionszone, so werden die Störungen an der gegenüberliegenden Wand reflektiert. Dabei steigt der Druck stark an, und es wird mit großer Wahrscheinlichkeit zur Ausbildung eines schrägen Stoßes kommen, wenn der reflektierten Welle auch noch durch die Reaktion merklich Wärme zugeführt wird. Neben der Stoßwelle, die nach vorne läuft (in Richtung der negativen x-Achse auf die Stoßfront zu), entstehen, je nach den Randbedingungen, noch Verdünnungswellen und entgegengesetzt lau-

fende Stoßwellen. Dadurch wird die Detonation stark gestört; vor allem wird eben die Chapman-Jouguet-Bedingung verletzt, und die Verdünnungswellen können in die Reaktionszone eindringen. Reicht die verfügbare Energie dabei nicht aus, um die Verdünnungswelle zu dämpfen, so erlischt die Detonation. Die Stärke der auftretenden Verdünnungswellen ist natürlich eng mit der Stärke der entstehenden Stoßwellen verknüpft. Denn je stärker die Stoßwelle, um so mehr wird die Detonationsfront verstärkt und um so größer sind die Abweichungen in der Chapman-Jouguet-Ebene. Die wichtigste Abweichung dabei ist das Absinken der Strömungsgeschwindigkeit unter die örtliche Schallgeschwindigkeit in bezug auf die Detonationsfront. Je größer nämlich diese Abweichung ist, desto tiefer dringt die Verdünnungswelle in die Reaktionszone ein und umso mehr Energie wird verbraucht.

Legt man die über das Zustandekommen der Detonationsgrenzen gemachten Annahmen zugrunde, so werden die bei der Messung der Detonationsgrenzen gefundenen Ergebnisse verständlicher. So hängt z.B. die an der Grenze verfügbare Energie nur von den reaktionsfähigen Bestandteilen der Gasgemische ab. Bei Knallgasdetonationen also im großen und ganzen von der H_2-Konzentration an der unteren und von der O_2-Konzentration an der oberen Grenze. Daher kommt es, daß die Grenzkonzentrationen von H_2 an der unteren Grenze und von O_2 an der oberen Detonationsgrenze sich unter sonst gleichen Bedingungen nahezu wie 2:1 verhalten (s.S. 27/28), da in beiden Fällen die gleiche Energiemenge geliefert werden kann, wenn jeweils alles im Unterschuß vorhandene Gas zu H_2O umgesetzt wird.

Bei konstantem Rohrdurchmesser sollten sich ähnliche Verhältnisse ergeben, wenn z.B. das Verhältnis der Länge der Reaktionszone zu der Eindringtiefe ungefähr gleich ist, d.h. wenn folgende Beziehung gilt:

69) $$\frac{\ell}{c \cdot \tau} \approx konst.$$

(ℓ = Länge der Reaktionszone, c = Schallgeschwindigkeit hinter der Stoßfront, τ = Reaktionszeit)

Die Schallgeschwindigkeit hinter der Detonationsfront ist nun im wesentlichen proportional der Schallgeschwindigkeit

vor der Stoßfront, und zwar gilt:

70) $c \sim c_0 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$ (c_0 = Schallgeschwindigkeit im ruhenden Gas)

Die Länge der Reaktionszone läßt sich abschätzen durch $\ell = D \cdot \tau$, wobei D die Detonationsgeschwindigkeit ist. Setzt man diese Werte in die obige Beziehung ein, so folgt:

71) $\frac{D \cdot \tau}{c_0 \cdot \tau} = \frac{D}{c_0} = M = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot konst$ (M = Machzahl)

Längs der Grenze für das 4-mm-Rohr im System H_2-O_2-He änderte sich nun z.B. die Temperatur um ungefähr 500° von 1500°K auf 2000°K (s.S. 31/32). Damit schwankt T_2/T_1 zwischen 5 und 7, wenn man T_1 = 300°K annimmt. Dann ändert sich $\sqrt{T_2/T_1}$ zwischen 2,2 und 2,6, d.h. aber, da es sich um eine grobe Abschätzung handelt, daß M längs einer Detonationsgrenze bei konstantem Rohrdurchmesser näherungsweise konstant ist[1]. - Im System H_2-O_2-N_2 ist die Änderung der Temperatur noch geringer, also die Machzahl noch besser konstant. - Aus der gegebenen Ableitung geht hervor, daß die Grenze danach nicht wesentlich von der Reaktionsgeschwindigkeit abhängt, also die Art der Reaktion keine allzu große Rolle spielt. Diese Feststellung steht mit den Messungen in Einklang.

Damit ist aber auch der Einfluß der Inertgase auf die Grenzen verständlich. He- und Ar-Zusätze führen infolge ihrer geringen spezifischen Wärmen zu einer Erhöhung der Temperatur hinter der Stoßfront unter sonst gleichen Bedingungen (gleiche Brenngaskonzentration). Dies führt aber zu einer Verkürzung der Reaktionszone und damit zu einem geringeren Einfluß der Wandstörungen. Es ist die Ursache für die starken Änderungen der Detonationsgrenzen in dem System H_2-O_2 bei geringen He- bzw. Ar-Zusätzen (~6%, s.S. 20/21). Durch diese geringen Zusätze wird im wesentlichen die Temperatur hinter der Stoßfront beeinflußt, während andere Eigenschaften, wie z.B. die Schallgeschwindigkeit, Wärmeleitfähigkeit und Zähigkeit, nahezu ungeändert bleiben. Die Grenzen werden sich daher so verschieben, daß bei ihnen hinter der Stoßfront ungefähr gleiche Verhältnisse herrschen. Das ist aber der Fall,

1) "M" schwankt um ungefähr 10%

wenn die Temperatur hinter der Stoßfront ungefähr gleich ist. Betrachtet man daraufhin die berechneten Temperaturen hinter den Stoßfronten (Tab. III, S. 31/32), so sieht man, daß die Temperatur hinter den Stoßfronten in diesem Bereich tatsächlich nur geringfügig schwankt. - Auch die Beobachtungen an He- bzw. Ar-reichen Gemischen lassen sich einordnen. Steigt nämlich der Inertgasgehalt so stark an, daß er die physikalischen Eigenschaften des Gemisches (z.B. die Schallgeschwindigkeit) bestimmt, so muß sich der starke Unterschied der Schallgeschwindigkeiten der beiden Gase Helium und Argon bemerkbar machen. Bei konstanter Temperatur beträgt nun das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten von He zu Ar $\sim 3:1$. Das bedeutet, daß sich Störungen von der Wand in He-reichen Gemischen unter sonst gleichen Bedingungen dreimal schneller ausbreiten als in Ar-reichen Gemischen. Da aber an den Grenzen das Verhältnis der Eindringtiefe der Störungen zur Länge der Reaktionszone ungefähr konstant sein soll, werden die Grenzen bei He-reichen Gemischen bei höheren Temperaturen hinter der Stoßfront als bei Ar-reichen Gemischen erreicht. Ebenso wird der Wandeinfluß in He-reichen Gemischen stärker sein als in Ar-reichen (s.S. 28/29). - Setzt man dagegen Knallgasgemischen Stickstoff zu, so sind die auftretenden Änderungen in der Temperatur hinter der Stoßfront und in der Schallgeschwindigkeit wesentlich geringer. Daher sollten die Grenzen durch Stickstoffzusatz nicht sehr beeinflußt werden, im Einklang mit den Meßergebnissen.

Der Einfluß des Rohrdurchmessers auf die Detonationsgrenzen läßt sich abschätzen, wenn man verlangt, daß an den Grenzen das Verhältnis der Länge der Reaktionszone zum Rohrradius ungefähr konstant sein soll, also ℓ/r = konst setzt. Macht man für ℓ den bekannten Ansatz $\ell = \ell_0 \exp(E/RT)$, wobei "E" eine Aktivierungsenergie ist, so folgt aus

72) $\frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\ell_2}{r_2}$ \quad 73) $\frac{r_2}{r_1} = \frac{\ell_2}{\ell_1} = \exp(E/RT_1) \cdot \frac{\Delta T}{T_2}$

Läßt man darin den Index "2" weg und betrachtet den Zustand "2" als variabel, so folgt, wenn man die logarithmische Ableitung bildet:

74) $$\frac{dr}{r} = -\frac{E}{R} \cdot \frac{dT}{T^2}$$

Für die Temperatur hinter einer Stoßwelle gilt nun[1], wenn $M^2 \gg 1$ ist:

75) $$\frac{T}{T_c} \approx 1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M^2$$

Daruas folgt:

76) $\frac{dT}{T} \sim \frac{dM}{M}$ und 77) $T \sim M^2$, also 78) $\frac{dr}{r} \sim -\frac{dT}{T^2} \sim -\frac{dM}{M^3}$

Andererseits ist[2]:

79) $$\frac{Q}{c_p \cdot T_1} = \frac{(1 - M^2)^2}{2(\varkappa + 1)M^2}$$

(Q = Reaktionswärme bei konstantem Druck und konstanter Temperatur). Daraus folgt:

80) $$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dM}{M} \cdot \frac{2M^2 - 1}{1 - M^2}$$

oder für $M^2 \gg 1$:

81) $$\frac{dQ}{Q} \sim \frac{dM}{M}$$

Weiter ist für $M^2 \gg 1$ $Q \sim M^2$. Damit erhält man:

82) $$\frac{dr}{r} \sim -\frac{dQ}{Q^2}$$

oder wenn man zwischen den Grenzen 1 und 2 integriert:

83) $$\ln \frac{r_2}{r_1} \sim \frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1}$$

Setzt man $r_2 = r_1 + \Delta r$ und entwickelt den Logarithmus unter der Voraussetzung $\Delta r / r < 1$, so folgt:

84) $$\frac{\Delta r}{r_1} \approx \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_1}$$

Die Reaktionswärme ist nun proportional der Brenngaskonzentration (s.S. 28), so daß gilt:

85) $$\frac{\Delta r}{r} \approx \frac{1}{C}$$

Also ist die Grenzkonzentration bei geringen Änderungen des Rohrdurchmessers dem reziproken Rohrdurchmesser proportional.

Der Einfluß des Rohrdurchmessers auf die Detonationsgeschwindigkeit ist dagegen sehr gering. Sie könnte im we-

1) + 2) Vgl. z.B. A.H. Shapiro, Bd. I, S. 118 u. 210

sentlichen nur durch starke Energieverluste an die Wand beeinflußt werden. Die durch die Störungen der Strömung entzogene Energie ist dagegen im Mittel null. Wären Reibung und Wärmeleitung nicht vorhanden, so ergäbe sich für die Energiebilanz der Störungen genau null. - Zusammenfassend kann man sagen, die zugrundegelegten Modellvorstellungen erlauben eine zwanglose qualitative Interpretation der Meßergebnisse. Eine quantitative Berechnung z.B. der Grenzen oder ihrer Durchmesserabhängigkeit würde dagegen die genaue Kenntnis aller beteiligten Vorgänge (Reaktionsablauf und hydrodynamische Vorgänge hinter der Detonationsfront) voraussetzen.

Wieweit lassen sich nun die entwickelten Modellvorstellungen experimentell untermauern? - Bei der Untersuchung spinnender Detonationen in Rohren konnten Toennies und Wagner (45) und Wagner und Dove (86) sowohl Unstetigkeiten in der Reaktionszone und hinter der Reaktionszone als auch schräge Stoßfronten beobachten. Die genannten Forscher fotografierten die Detonationen, die sich in rechteckigen oder runden Rohren ausbreiten, mit einer Trommelkamera. Sie benutzten dabei u.a. die beiden folgenden Aufnahmetechniken:

1. Der Film bewegte sich senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Detonation und eine größere Strecke des Detonationsrohres wurde auf den Film abgebildet.

2. Der Film bewegte sich in Ausbreitungsrichtung der Detonation und ein Spalt (1 mm Breite) wurde auf den Film abgebildet. Die Filmgeschwindigkeit entsprach unter Berücksichtigung des Abbildungsmaßstabes entweder der Detonationsgeschwindigkeit oder der Geschwindigkeit der Schwaden.

Die Bilder, die mit der ersten Aufnahmetechnik erhalten wurden, gaben die bekannten Aufnahmen spinnender Detonationen (s.S. 18). Das wesentliche an diesen Aufnahmen sind die periodischen Schwankungen der Leuchtzone (Reaktionsfront). - Bei der zweiten Aufnahmetechnik konnten Leuchtspuren beobachtet werden, die einem Vorgang zugeordnet werden mußten, der sich senkrecht zur Rohrwand ausbreitete. Das mit dem Vorgang verbundene Leuchten deutete darauf hin, daß es sich um Kompressionswellen oder Stoßwellen handeln muß. Bewegte sich bei den Aufnahmen der

Film mit der Geschwindigkeit des Bildes der Detonationsfront, so waren die Leuchtspuren auf dem Film verwaschen (unscharf). Dagegen ergaben sich scharfe Linien, wenn die Filmgeschwindigkeit der Schwadengeschwindigkeit angepaßt war. Das bedeutet aber, daß es sich um einen Vorgang handelt, der sich mit der Geschwindigkeit der Schwaden in Richtung der Detonationsfront bewegt. Dieses Verhalten entspräche also genau demjenigen der Kompressions- oder schwachen Stoßwellen von der Wand, die dem entwickelten Modell zugrundeliegen. - Schräge Stoßwellen, die sich von der Wand in das Gas hinein bewegten, wurden auch von Kistiakowsky, Knight und Malin (28) beobachtet, und zwar ebenfalls an spinnenden Detonationen. - Weitere Untersuchungen spinnender Detonationen durch Duff und Mitarbeiter (91) ergaben ebenfalls, daß an der Wand Kompressionswellen entstehen.

Untersuchungen instabiler und spinnender Detonationen in der Nähe der Detonationsgrenzen durch Manson und Mitarbeiter (46) zeigen, daß zwischen der Flammenfront und der Detonationsfront Störungen (Wellen) auftreten. - Besonders deutlich beobachteten Oppenheim und Mitarbeiter (88) Wellen zwischen Flammen- und Stoßfront bei anlaufenden Detonationen. Sie fotografierten dabei den Anlaufvorgang mit Hilfe einer Schlierenoptik.

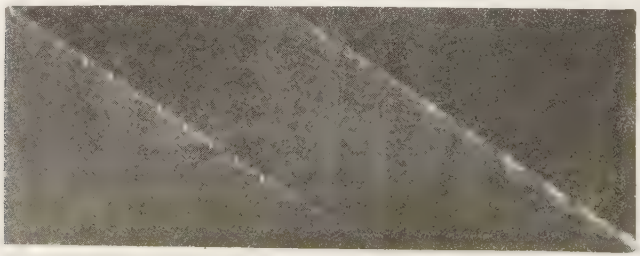
Die Spinwellenlänge ergibt sich, wie Manson (49) und Fay (50) gezeigt haben, für die Ausbreitung einer Detonation in einem zylindrischen Rohr aus den Wurzeln der Ableitungen der Besselfunktionen (s. S. 69). Die so berechneten Frequenzen stimmen gut mit gemessenen überein. - Andererseits enthält die Lösung der Schwingungsgleichung einen Faktor $\cos m\tilde{\nu}\frac{z}{\ell}$, in dem eine Länge in z-Richtung vorkommt (z-Achse = Rohrachse), der Fay keine eindeutige physikalische Bedeutung beilegt. Bei der in dieser Arbeit gegebenen Ableitung müßte sie der Länge der Reaktionszone oder noch besser dem Abstand Stoßfront-Flammenfront entsprechen, wenn man die Flammenfront als zweite Diskontinuitätsfläche betrachtet. Setzt man zur Abschätzung der zugehörigen Frequenz $\ell \sim 1$ mm, so folgt aus $k = \frac{2\tilde{\nu}}{\lambda} = m \cdot \frac{\tilde{\nu}}{\ell}$:

$$\nu = c/\lambda = mc/2\ell$$

also $\nu = \frac{2mc}{4\ell}$. Setzt man $m = 1$, $c = 1$ km/sec, so folgt:

$\nu = 10^6 sec^{-1}$. Während die normalen Spinfrequenzen von der Größenordnung $10^5 sec^{-1}$ sind, würde es sich hierbei um eine wesentlich größere Frequenz handeln. Vielleicht ist sie die Ursache des sog. kurzwelligen Spins, der von einigen Forschern (89, 90) beobachtet worden ist, in diesen Schwingungen zu suchen. - Die gegebene Interpretation der Größe ℓ würde es auch gestatten, die Abhängigkeit der zugehörigen Spinfrequenz von der Reaktionsgeschwindigkeit zu deuten, die von Wagner (90) z.B. an $CO-O_2$-Detonationen gefunden wurde. Wagner und Mitarbeiter untersuchten spinnende $CO-O_2$-Detonationen, denen sie geringe Mengen H_2 zusetzten. Dabei stellten sie fest, daß die Spinwellenlänge von der Menge des zugesetzten Wasserstoffs abhängt, und zwar nahm die Wellenlänge bei Wasserstoffzusatz ab. Sie blieb über kürzere Konzentrationsbereiche konstant, und die Bereiche gleicher Frequenz überlappten sich etwas. Es wurden also die Grundschwingung, die 1. Oberschwingung u.s.w. beobachtet. Da nun H_2 die Reaktionsgeschwindigkeit der $CO-O_2$-Gemische erhöht, die Länge der Reaktionszone also abnimmt, könnten die Beobachtungen mit Hilfe der gegebenen Vorstellungen interpretiert werden, während bei der von Fay gegebenen Erklärung des Spins nicht so klar zu sehen ist, wie die Reaktionsgeschwindigkeit die Spinfrequenz beeinflußt.

In der Nähe der Grenzen würden sich infolge der theoretischen Untersuchungen (S. 61 - 72) weitere Schwankungen ergeben, deren Ursache die in der Reaktionszone entstehenden schrägen Stoßfronten sind. In diesem Zusammenhang wurde gezeigt (s.S. 70 - 72), daß es zu einem periodischen Anlaufen einer Detonation - periodischer Übergang Flamme-Detonation - kommen müßte. In Figur 35 ist nun eine



10 mm Rohrdurchmesser → 16 mm

Figur 35: Spinnende Detonationen in Knallgas-He-Gemischen in der Nähe der Detonationsgrenzen

Aufnahme spinnender Detonationen wiedergegeben. Die Detonationen breiten sich dabei in Rohren von 10 und 16 mm Innendurchmesser aus, und zwar in einem Gemisch von 14,5% H_2, 55% He und 30% O_2, das in der Nähe der zugehörigen Detonationsgrenzen liegt (s.S. 22). Die Spinstruktur im 16-mm-Rohr ähnelt nun sehr dem periodischen Anlaufen einer Detonation. Unter diesen Annahmen ließen sich auch die bei spinnenden Detonationen auftretenden Strukturen (Retonationswellen) am einfachsten deuten, nämlich als Mach'sche Linien.

V 1 Zusammenfassung

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit war es, einerseits festzustellen, ob und wie die Detonationsgrenzen in engen Rohren vom Rohrdurchmesser und Inertgaszusätzen abhängen und andererseits einen gefundenen Einfluß des Rohrdurchmessers und der Inertgase zu deuten. Die Messungen ergaben nun eine Abhängigkeit der Detonationsgrenzen sowohl vom Rohrdurchmesser als auch von Inertgaszusätzen, der nicht allein auf kinetische Ursachen zurückgeführt werden konnte. Vor allem die Tatsache, daß die Machzahl der Detonation an den Grenzen bei konstantem Rohrdurchmesser nicht stark variierte, während die unter der Annahme einer ebenen Stoßfront berechnete Temperatur hinter der Stoßfront sich stark änderte, führte zu der Vermutung, daß die Detonationsgrenzen durch hydrodynamische Faktoren mitbestimmt werden. - Bei dem Versuch, die hydrodynamischen Faktoren zu ermitteln ergab sich ein Randwertproblem. Aus der Folgerung, daß dieses Problem keine eindeutige stetige Lösung im Rahmen der isentropen wirbelfreien Strömungsgleichungen besitzt, wurde geschlossen, daß hinter der Detonationsfront infolge des Wandeinflusses Unstetigkeiten (Stoßwellen) entstehen, die die Ausbreitung der Detonation beeinflussen. Mit Hilfe dieses Modells konnten die Meßergebnisse zwanglos interpretiert werden. Außerdem ergaben sich der Spin und eine Möglichkeit, die Abhängigkeit der Spinfrequenz von der Reaktionsgeschwindigkeit zu deuten.- Die aus dem Modell gezogenen Folgerungen konnten mit Hilfe experimenteller Ergebnisse gestützt werden. Vor allem die Tatsache, daß hinter der Chapman-Jouguet-Ebene Überschallströmung herrscht, entspricht den experimentellen Ergebnissen.

Literaturverzeichnis

1. BERTHELOT, M., "Comptes Rendus", vol 93, No. 18 (1881)
   BERTHELOT, M., und VIEILLE, F., "Annales de Chim. et Phys." (VI) vol. 4, S. 13 (1885)

2. Le CHATELIER, "Comptes Rendus", vol. 93, S. 148 (1881)
   MALLARD u. Le CHATELIER, "Annales des Mines" (8th series), vol. 4, S. 274 (1883)

3. BUNSEN, "Ann. Phys. Chem.", vol. 131, S. 161 (1876); "Phil. Mag.", vol. 34, S. 489 (1867)

4. DIXON, H.B., Phil.Trans.Roy.Soc., London, A 84, 97 (1893)

5. DIXON, H.B., Phil.Trans.Roy.Soc., London, A 200, 315(1903)

6. CHAPMAN, D.L., "Phil. Mag.", 47, 90 (1899)

7. JOUGUET, E., "Comptes Rendus", 139, 121 (1904); "Journal Math.", 347 (1905) u. 6 (1906); "Comptes Rendus", 144, 415 (1907); 149, 1361 (1909) u. 150, 91 (1910)

8. RIEMANN, B., "Kgl. Ges. d. Wiss.", Göttingen, 8, 43 (1860); ges. Werke, 2. Aufl., S. 144, 145

9. RANKINE, W.J.M., Trans.Roy.Soc., London, 160, 277 (1870)

10. HUGONIOT, Journ. Math. IV, 3, 477 (1887); Journ. Ec. Polytechn., Cahiers, 57-58 (1889)

11. CAMPBELL, C. u. WOODHEAD, D.W., Journ.Chem.Soc., 1572 (1927) und 3010 (1926)
    CAMPBELL, C. u. FINCH, A.C., Journ.Chem.Soc., 2094 (1928)
    CAMPBELL, C., WITHWORTH, C. u LITTLER, W.B., Proc.Roy.Soc., London, A 137, 380 (1932)

12. LAFITTE, P., Ann. Phys. X, 4, 623 (1925); "Comptes Rendus", 186, 951 (1928)
    LAFITTE, P. u. DUMANOIS, P., "Comptes Rendus", 183, 284 (1926)

13. BONE, W.A. u. FRASER, R.P., Phil. Trans. Roy. Soc., London, 228 (1927); 230 (1931); 235 (1936); Proc. Roy. Soc., A 130, 542 (1931)
    BONE, W.A., FRASER, R.P. u. WHEELER, W.H., Phil. Trans. Roy. Soc., London, A 235, 29 (1935)

14. TAYLAN, W. u. WALLIS, N.S., J.Americ.Chem.Soc., 123, 420 (1923)

15. [illegible]BLANDT, R., Zeitschr. Phys. Chem., 110, 637 (1924) u. [illegible], 227 (1925)

16. [illegible]RETON, M.J., Ann.Office nat.Combustibles Liquides, 11 487 (1936)

17. BECKER, R., Zeitschr. f. Phys., 4, 393 (1921) u. 8, 321 (1922), Zeitschr. Elektrochem., 23, 40 (1917); Zeitschr. Techn. Physik, 3 157 (1922)

18. DOERING, W. u. BURKHARDT, G., Beiträge zur Theorie der Detonation, AMC, W.F. Ohio Air Document Division FB, Film R 23, 181 (1939)

19. JOST, W., Explosions- u. Verbrennungsvorgänge in Gasen; Verlag Julius Springer, Berlin, 1939.

20. SCORAH, R.L., J. Chem. Phys., 3, 425 (1935)

21. SCHMIDT, A., Z. ges. Schieß- u. Sprengstoffw. 30, 364 (1935) u. 31, 8, 322 (1936)

22. ZELDOVICH, J.B., Zb. eksp. teor. fiz. SSSR 10, 542 (1940); THEORY of DETONATION; Academic Press, New York 1960

23. DOERING, W., Ann. Physik, 43, 421 (1943); NEUMANN, J.V., Theory of stationary Detonation Waves, OSRD Rep., No 549 (1942)

24. FAY, J.A. u. OPEL, G.L., J.Chem.Phys., 29, 955 (1958) und Phys. Fluids, 2, 283 (1959)

25. DUFF, R.E., KNIGHT, H.T. a. RINK, J.P., Phys.Fluids, 1, 393 (1958)

DUFF, R.E., J.Chem.Phys., 28, 1193 (1958)

26. WHITE, D.R., Physics Fluids, 4, 465 (1961); WHITE, D.R., and CARY, K.H., Phys. Fluids (1963)

27. KISTIAKOWSKY, G.B. a. KYDD, P.H., J.Chem.Phys., 25, 824 (1956) u. 23, 271 (1955)

28. KISTIAKOWSKY, G.B., KNIGHT, H. a. MALIN, M., J.Chem.Phys., 20, 5, 884 u. 876 u. 6, 994 (1952)

29. JOST, W., JUST, Th. u. WAGNER, H.Gg., VIIth Symp. (Intl.) on Combustion, S. 582

30. JUST, W. u. WAGNER, H.Gg., Zeitschr. Elektrochem., 61, 679 (1957)

31. JOST, W. u. WAGNER, H.Gg., Chem.Soc., London, Spec. Publ. No. 9, 197-206 (1957)

32. LUIG, F., JUST, Th. u. WAGNER, H.Gg., Z. Elektrochem., 65, 403 (1961)

33. JUST, Th., PUSCH, W. u. WAGNER, H.Gg., Z. Elektrochem., 65, 410 (1961)

34. WAGNER, H.Gg., Gaseous Detonations and the Structure of a Detonation Zone (AGARDograph No. 41, Pergamon Press, Oxford 1961, Ch. IX, S. 320)

35. KISTIAKOWSKY, G.B., J. Chem. Phys., 19, 1611 (1951)

36. BENNETT, A.L. a. WEDAA, H.W., Second ONR Symposium on Detonation, Office of Naval Research, Washington 1955

37. Gilkerson, W.R. a. DAVIDSON, N., J.Chem.Phys. 23, 687 (1955)

38. JUST, Th. u. WAGNER, H.Gg., Forsch.Gebiete Ingenieurw. 27, No. 2, 46-52 (1961)

39. BAUMANN, W., URTIEW, P.A. a. OPPENHEIM, A.K., Z. Elektrochemie 65, 898 (1961)

40. BAUMANN, W. u. WAGNER, H.Gg., Z. Elektrochem. 65, 895 (1961)

41. MARTIN, F.J., Physics of Fluids, 1, 399 (1958)
MARTIN, F.J., VIIth Symposium (Intl.) on Combustion (Butterworths Sc. Publ., London, 1959, S. 856)

42. LADERMANN, A.J. a. OPPENHEIM, A.K., Phys. Fluids 4, 778 (1961
LADERMANN, A.J., URTIEW, P.A. a. OPPENHEIM, A.K., Combustion and Flame 6, 325 (1962); IXth Symposium (Intl.) on Combustion (Academic Press, New York, 1963, S. 265)

43. SCHÜLLER, Dissertation, Darmstadt 1954

44. OPPEHEIM, A.K. a. STERN, R.A., VIIth Symposium (Intl.) on Combustion, S. 837 (1959), Butterworths Sc.Publ., London

45. TOENNIES, J.P. u. WAGNER, H.Gg., Z.Elektrochem. 59, 7 (1955)

46. BROCHET, Ch., BROSSARD, J. u. MANSON, N., Compt. Rendus 250, 3949 (1959); ebd. 254, 3992 (1962); 255, 1190 (1962)
BROCHET, CH. u. MANSON, N., Coll. Inter. du C.N.R.S. sur les Ondes de Detonation, 1961, S

47. PECK, M. and THRAP, R.G., J.Chem.Phys. 26, 740 (1957)

48. KISTIAKOWSKY, G.B. and ZINMAN, W.G., J.Chem.Phys., 23, 1889 (1955)

49. MANSON, N., Propagation des Detonation et des Deflagration dans les Melanges gaseux; l'Office National d'Etudes et des Recherches Aeronautiques et l'institut Francais des Petrol, Paris, 1947

50. FAY, J.A., CHem. Phys. 20, No. 6, 942 (1952)

51. DOERING, W. u. SCHOEN, H., Z.Elektrochem. 54, 231 (1950)

52. THOMAS, L.H., J. Chem. Phys. 12, No. 11, 449 (1944)

53. COWAN, G.R. a. HORNIG, D.F., J.Chem.Phys. 18, 1008 (1950)

54. GREENE, E.F., COWAN, G.R. a. HORNIG, D.F., Journal of Chemical Physics 19, 427 (1951)

55. GRIFFITH, W., BRICKEL, D. a. BLACKMAN, V., Phys. Rev. 102, 1209 (1956)

56. JOST, W., Schrift. Deutsch. Akadem. Luftfahrtforsch. 9, 133 (1939); Third Symposium (Intl.) on Combustion, S. 424, Williams a. Wilkins, 1949; Forsch.Ing.Wes. 2[illegible], 19 (1952)

57. MARTINENGO, A. und WAGNER, H.Gg., Z.Phys.Chem. 22, 292 (1959); Arbeitsschutz 11, 254 (1959); Forsch. Ing. Wes. 20, 198 (1960)

58. SHEPHERD, W.C.F., IIIrd Symposium (Intl) on Combustion, S. 301, Williams and Wilkins, Baltimore, 1949

59. BERETS, D.J., GREENE, E.F. and KISTIAKOWSKY, G.B., J. Amer. Chem. Soc. 72, 1086, 1950

60. MOORADIAN, M. a. GORDON, W.E., J. Chem. Phys. 19, 1166 (1951)

61. STEINBERG, M. a. KASKAN, W.E., Vth Symposium on Combustion, S. 664, Reinhold, New York, 1955

62. SPENER, G., Unveröffentlichte Ergebnisse

63. GORDON, W.E., MOORADIAN, A.J. and HARPERS, S.A., VIIth Symposium (Intl.) on Combustion, S. 752, London , 1955

64. WAGNER, H.Gg., Dissertation Darmstadt 1956

65. WAGNER, H.Gg., Habilitationsschrift Göttingen 1960

66. MANSON, N., Comptes Rendus 222, 46 (1946)

67. LEWIS, B. u. v. ELBE, G., Combustion, Flames and Explosions of Gases; Academic Press Inc., New York 1961

68. WAGNER, H.Gg., Z. Elektrochemie 59, 906 (1955)

69. COURANT and FRIEDRICHS; Supersonic Flow and Shock Waves; Pure and applied Mathematics, Vol. 1 (Interscience Publ., Inc., New York 1948)

70. FRANK, v. MISES; Differentialgleichungen der Physik Bd. II. S. 373 (Friedr. Vieweg, Braunschweig, 2.Auflage, 1961)

71. KAUFMANN, W.; Technische Hydro- und Aeromechanik; S. 39 ff. (Springer-Verlag, Berlin/Göttingen 1963)

72. LANDAU, L. a. LIFSCHITZ, E.M.; Course of theoretical Physics, Vol. 6, Fluid Mechanics (Translated from the Russian by J.B. Sykes and W.H. Reid); Pergamon Press, London,

73. Courant a. Hilbert; Methodes of Mathematical Physics, Vol. I, II (Interse. Publ., Inc. New York, 1961)

74. SMIRNOW, W.L.; Lehrgang der höheren Mathematik, Teil IV (VEB, Deutscher Verlag d. Wissensch., Berlin 1961)

75. SEMJONOW, N.N.; Einige Probleme der chemischen Kinetik und Reaktionsfähigkeit; Akademie-Verlag, Berlin 1961

76. BECHERT, K., Annal. Phys. (5), 37, 89 (1940); 38, 1 (1940)

77. BECHERT, K., Annal. Phys. (5), 39, 169-202 (1941)

78. BECHERT, K., Annal. Phys. (5), 39, 357-372 (1941)

79. SOMMERFELD, A.; Vorlesungen über theoretische Physik Bd. II, (Dietrich'sche Verlagsbuchhdlg. Wiesbaden 1947)

80. STANYUKOVICH, K.P.; Unsteady Motion of Continuous Media; Pergamon Press, Oxford, 1960

81. SCHLICHTING; Grenzschichttheorie (Verlag G. Braun, Karlsruhe, 2. Auflage, 1954)

82. SHAPIRO, A.H.; The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow, Bd. I, II (The Ronald Press Company, New York, 1954)

83. WEGENER, P.P., Phys. Fluids 2, (1959); ARS Journal 30, 322 (1960)

84. JOST, W., Z. Elektrochemie 41, 183 (1935); 42, 136 (1939)

85. JOST, W., Third Symposium (Intl.) on Combustion, S. 424; Williams and Wilkins, 1949; Ninth Symposium (Intl.) on Combustion, S. 1013 (Academic Press, New York, 1963)

86. DOVE, J.E. u. WAGNER, H.Gg., VIIIth Symposium (Intl.) on Combustion, S. 589 (Williams and Wilkins, Baltimore 1962)

87. WAGNER, H.Gg., Ninth Symposium (Intl.) on Combustion, S. 454 (Williams and Wilkins, New York 1963)

88. LADERMANN, A.J. a. OPPENHEIM, A.K., Proc.Roy.Soc., London, A 268, 153 (1962)

89. WAGNER, H.Gg., Z. Elektrochem. 59, 906 (1955)

90. MANSON, N., BROCHET, Ch., BROSSARD, H. a. PUJOL, T., Ninth Symposium (Intl.) on Combustion (Academic Press, New York, 1963) S. 461

91. DUFF, R.E., Phys. Fluids 4, 1427 (1961)

92. PUSCH, W. u. WAGNER, H.Gg., Combustion and Flame 6, 157(1962)

93. GREENE, E.F. and HORNIG, D.F., J.Chem.Phys. 21, 617 (1953)

94. SOMMERFELD, A., Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI, Partielle Dgl. d. Physik (Dietrich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1960)

95. OSWATITSCH, G., Gasdynamik, Wien 1952

Lebenslauf

Am 10. 9. 1933 wurde ich als Sohn des Dipl.-Handelslehrers Gerhard Pusch und seiner Ehefrau Käthe, geb. Hoche, in Berlin-Pankow geboren. - Vom Herbst 1940 bis zum Herbst 1944 besuchte ich die Volksschule, und zwar zunächst in Berlin-Pankow, später, nach der Evakuierung aus Berlin, in Wriezen an der Oder. Im Herbst 1944 wurde ich in die Wriezener Oberschule aufgenommen. Infolge der Kriegswirren und der Kapitulation besuchte ich dann nacheinander die Oberschulen in Neuruppin, Berlin-Pankow und Berlin-Zehlendorf mit Unterbrechungen bis zur 8. Klasse. - Im Januar 1948 setzte ich den Besuch der Oberschule in Clausthal-Zellerfeld (Harz) an der Robert-Koch-Schule fort und legte dort Ostern 1954 mein Abitur ab. - Im Mai 1954 ließ ich mich an der Universität Göttingen immatrikulieren und legte am 25. 7. 1956 mein Vordiplom in Physik ab. Danach erhielt ich im Institut für physikalische Chemie der Universität Göttingen meine Diplomarbeit. Mit einer Arbeit über "Untersuchungen an Detonationen in Kohlenwasserstoff-Sauerstoff-Gemischen" bestand ich am 11. 5. 1960 das Hauptdiplom in Physik.- Nach dem Hauptdiplom arbeitete ich weiter am Institut für physikalische Chemie der Universität Göttingen, und zwar hauptsächlich auf dem Gebiet der "Verbrennung". Mit einer Arbeit "Der Einfluß des Rohrdurchmessers auf die Ausbreitung einer Detonation" legte ich am 15.5. 1964 die Doktorprüfung für den Dr. rer. nat. der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Georg-August-Universität Göttingen ab. - Während meiner Doktorandenzeit war ich am Institut für physikalische Chemie zunächst als wissenschaftliche Hilfkraft, später als Wissenschaftlicher Mitarbeiter und Verwalter einer wissenschaflichen Assistentenstelle hauptsächlich im Praktikum tätig.

Xerografie-Druck
Chemoprint GMG
Gießen